CURS ELEMENTAR

DE

ALGEBRA

DE

N. CULIANU,

profesor la Facultatea de şciinţi şi la
Institutele-Unite din Iassi.

EDITIUNEA a III-a.



IASSY.

Tipo-Litografia Buciumului Roman.

1883.

CURS ELEMENTAR

DE

ALGEBRA



TABELA MATERIELOR.

Resolvirea ecuaţiunilor de gradul ănteiu cu mai multe necunoscute.

CARTEA III.

CARTEA IV.

Cuestiuni de maximum şi de minimum.

Interese compuse şi anuităţi.



CURS ELEMENTAR
de
A L G E B R A.

Noţiuni preliminare.

1. Algebra este o sciinţă a căria scop è de a dà regule generale pentru resolvirea cestiunilor relative la numere, considerate ca represintănd mărimi or cari.

2. Pentru aceasta ea generalisează operaţiunile fundamentale ale Aritmeticei, intrebuinţănd diferite semne abreviative, şi represintănd prin litere numerile intr'un mod general.

3. Semnele abreviative ale Algebrei sunt următoarele:

1°. Semnul + care se pronunţă *plus* şi serve a indicà adiţiunea a două sau mai multe numere. Aşa a+b, ne indică suma a duoĕ numere insemnate prin *a* şi *b*.

2°. Semnul—, care se pronunţă *minus* şi care serve a indicà subtragerea unui numĕr din altul. Aşa a—b, ne indică diferinţa intre două numere insemnate unul prin *a* altul prin *b*.

3°. Semnul ×, care se pronunţă *immulţit prin* şi care serve a indicà immulţirea unui numĕr prin altul. Aşa a×b ne indică productul al două numere insemnate unul prin, a, altul prin b. Une-ori ca semn al immulţirei se intrebuinţază punctul. Ast-fel a. b este acelaşu lucru cu a×b. Când însă factorii sunt represintaţi prin litere, precum in casul de faţă, cele mai de multe ori immulţirea

lor se indică scriindu'i unul după altul fără intrepunere de vre un semn. Ast-fel ab este acelaş lucru cu a×b.

4⁰. Semnul : care se pronunţă *împărţit prin*, serve a indicà divisiunea unui numĕr prin altul. Aşa a : b ni representă cuoţientul divisiunei numerilor insemnate prin a şi b. Se mai inseamnă divisiunea unui numĕr prin altul, scriind dividendul deasupra divisorului şi separăndu'i prin o linie orizontală. Astfeliu $\frac{a}{b}$ represintă cuoţientul numerilor a şi b. Această scriere a divisiunei s'ar putè pronunţâ in mod destul de scurt *a supra b*. *).

5⁰. Semnul adiţiunei unei cătimi către sine însăşi, căruia i se dă nume de *çoeficient*, şi care constă intr'un numĕr particular ce se scrie ca factoriu inaintea unei cătimi algebrice. Aşa in cătimea *5ab*, 5 este *coeficient*, şi esprimă adiţiunea productului *ab*, de 5 ori către sine insuşi.

6⁰. Semnul immulţirei unei cătimi de mai multe ori prin sine însăşi, căruia i se dă nume de *esponent* şi care consistă intr'un numĕr ce se scrie deasupra cătimei respective. Aşa a^5 represintă productul immulţirei lui *a* de 5 ori prin sine însuşi, şi se pronunţă *a cinci* sau *a* la a 5-ea potenţă. In alte cuvinte notaţiunea a^5 este o abreviaţiune a productului a. a. a. a. a.

Se dă nume de *potenţă*, resultatului immulţirei unui numĕr de mai multe ori prin sine insuşi. *Gradul* potenţei unui numĕr, este numerul ce arată cuotitatea factorilor ecuali, ai căror product este insăşi potenţa. El este totdeuna identic in mărime cu esponentul. Aşa in potenţa a 5-a a lui *a*, 5 este gradul potenţei. Este aseminea in usu a se ḑice că un numer *a* este *redicat* la a m^n potenţă, cănd acest numer este luat de *m* ori ca factor.

Spre esemplu in a^5 se ḑice că *a* este *redicat* la *a* 5-a *potenţă*.

*) Pronunţarea *a supra b*, a notaţiunei $\frac{a}{b}$ care introduce o rapitate insemnată in limbagiul algebric. a fost pare-mise pentru primă dată intrebuinţată de reposatul Ioan Pop profesor de matematici la Liceul şi Facultatea de sciinţi din Iassi.

7º. Semnul $\sqrt{\quad}$, care se pronunţă *radăcina din* şi căruia i se dă nume de *radical*. Operaţiunea ce esprimă acest semn, este o operaţiune inversă a rădicărei la potenţă; i se dă nume de estragere de rădăcină. Ast-fel $\sqrt[n]{a}$, care se pronunţă a *n*-a *rădăcină* din *a*, indică un numer, al căruia *n*-a potenţă este ecuale cu *a*. Acéstă notaţiune numerul *n* se numesce *indiciul* radicalului. Când voim a esprime o estragere de a 2 a rădăcină dintr'un numer *a*, scriem simplu $\sqrt{a}$, fără a mai pune indiciul in evidenţă şi cetim *rădăcina* a *duoa* din *a* sau *rădăcina patrată din a.*

8º. Semnul=, care se pronunţă *ecuale cu* sau *deopotrivă cu*, se intrebuinţază pentru a esprime ecualitatea a duoĕ cătimi. Aşa $a=b$ esprime ecualitatea numerilor represintate prin *a* şi *b*. Numerul scris la stănga, se numesce *membrul antèiu* al ecualităţei, şi cel de a dreapta, *membrul al doilea.*

9º. Semnul$>$, care este semnul neecualităţei şi care se pronunţă *mai mare decàt*, sau *mai mic decăt*, după cum laturile unghiului figurat de acest semn, sunt indreptate de la dreapta spre stănga sau de la stănga spre dreapta.

Aşa in neecualităţile următoare: 1º $a<b$, 2º $c>d$, cetim in ăntĕia *a* mai mic decăt b; in a doua *c* mai mare decăt *d*.

1º. Semnul ( ), căruia i se dă nume de parintesă şi care se intrebuinţază de căte ori voim a indicà că mai multe numere sunt supuse la aceeaşi operaţiune. Aşà pentru a indicà că totimea numerilor $a+b-c$ legate intre ele prin semnele $+$ şi $-$ este a se inmulţi prin un numĕr *n* scrim: $(a+b-c).n$.

4. Aceste-su semnele abreviative usitate in Algebră. Unele din ele serv a indicà operaţiunile fundamentale cdiţiunea, sustracţiunea, multiplicaţiunea, divisiunea, redicarea la potenţe şi estragerea de rădăcină; celelalte serv a indicà raporturile de mărime intre cătimi.

5. Când cu ajutorul semnelor abreviative ale operaţiunilor fundamentale, legăm intre ele mai multe litere şi numere, căpătăm atuncĭ ceia ce constitue in general *o espresiune algebrică*. Astfeliu *o espresiune algebrică* este

o intrunire de mai multe litere, legate intre ele prin semnele operaţiunilor fundamentale.

Esemplu. $3ab^2$, $5ac+\sqrt{2ad}$, $15bd^3+4c^2-9ac$, sunt *espresiuni* sau *câtimi algebrice.*

6. O espresiune algebrică, compusă din mai multe părţi legate intre ele prin semnul + sau —, se numesce *polinom.*

Esemplu. Espresiunea $5ab+3a^2bc^3-4bfd^2+6acd^3+7$ este un polinom. Părţile $5a$, $+3a^2bc^3$, $-4bfd^2$, $+6acd^3$, $+7$, ce intră astfeliu in compunerea polinomului se numesc *termini.*

Terminii preceşi de semnul +, se numesc *termini positive,* cei preceşi de semnul—, se numesc *termini negativi.* Cei d'intâiu se mai numesc *aditivi*, cei din urmă *subtractivi.*

Notă. Terminul ântêin al unei espresiuni algebrice. se scrie fără semn când este un termin positiv. Astfeliu in esemplul de mai sus terminul $5ab$, al căruia semn nu este pus in evidinţă, este un termin positiv sau aditiv, impreună cu terminii $+3a^2bc^3$, $+6acd^2$, $+7$; terminui $-4bfd^3$ este terminul negativ sau substractiv.

7. O espresiune algebrică compusă din trei termini, se numesce *trinom*; compusă din doui termini se numesce *binom.* Când numerul terminilor ce intră in compunerea unei espresiuni algebrice se reduce la unul singur, espresiunea se ḑice *monom.* Esemplu

$5ac^2$, $7\sqrt{ab}$, $3\frac{ab}{c}$, sunt monomi. Un *monom* este dar

o espresiune algebrică, in care literile şi numerile, in ea cuprinse, nu sunt legate între ele prin semnul +, sau prin semnul—.

8. Intr'o espresiune algebrică terminii ce cuprind aceleşi litere cu aceiasi esponenţi, şi cari difer intre ei numai prin coeficienţi lor numerici, se numesc *termini simili* saŭ *termini asemene*; in casul contrariu se ḑic *termini disimili* sau *nĕasemene.* Astfeliu in espresiunea:

$$5a^3b+7a^2b^3-9a^3b,$$

Sunt termini asemene, terminii $+5a^3b$ şi $-9a^3b$.

O espresiune algebrică se poate totdeauna simplificà când cuprinde termini asemene.

Fie espresiunea $3ab^3-5a^2b^3+8ab^2-7a^2b^3+4ab^2+6a^2b^3$. Este evident că terminii simili $3ab^2+8ab^2+4ab^2$ se pot inlocuì prin terminul unic $+15ab^2$, căci după definiţiunea coeficientului, acest termin este ecuale cu $3ab^2+8ab^2+4ab^2$. In adevĕr coeficientul numeric 15 pus inaintea productului ab^2, indică adiţiunea acestuia de 15 ori cătră sine insuş. Această adiţiune se poate concepe a fi efectuată adiţionănd pe ab^2, mai ăntĕiu de trei ori, apoi de 8 ori şi in fine de patru ori, ceia ce se esprime prin ecualitatea

$$15ab^2=3ab^2+8ab^2+4ab^2.$$

De asemenea in espresiunea propusă terminii simili, $-5a^2b^3-7a^2b^3+6a^2b^3$ se pot inlocuì prin terminul unic $-6a^2b^3$; căci este mai inteiu evident că $-5a^2b^3-7a^2b^3$ este de opotrivă cu $-12a^2b^3$. Vom puté scri dar:

$$-5a^2b^3-7a^2b^3+6a^2b^3=-12a^2b^3+6a^2b^3;$$

ănse $-12a^2b^3$ se poate concepe ca resultănd din luarea lui a^2b^3 mai ăntĕiu de şese ori cu semnul—, şi apoi iar de alte şese ori cu acelaş semn. Astfeliu membrul al douilea al ecualităţei precedente se va scrí:

$$-12a^2b^3+6a^2b^3=-6a^2b^3-6a^2b^3+6a^2b^3,$$

sau $-12a^2b^3+6a^2b^3=-6a^2b^3$, căci cei duoi termini din urmă că represintănd cătimi ecuali şi de semne contrarii, se anulézā.

Această simplificare a unei espresiuni algebrice in privinţa terminilor simili, se numesce *reducţiune*. Reducţiunea este dar o operaţiune care consista in a intruni mai mulţi termini simili intr'unul singur. Efectuarea acestei operaţiuni, care este foarte usitată în algebră, nu presintă nici o dificultate, precum am vĕḑut in esemplul precedent. Regula practică a acestei operaţiuni se poate enunţa in modul următor: *când terminii simpli au acelaş semn, reducţiunea se face adiţionănd coeficienţii numerici şi scriind literile cu esponenţii lor. Când terminii simili, sunt de semn contrariu reducţiunea se face scăḑănd coeficienţii numerici unul din altul, scriind literile cu esponenţii lor si dănd resultatului, semnul coeficientelui celui mai mare.*

Astfeliu in esemplul precedinte reducţiunea terminilor simili $-12a^2b^2+6a^3b^5$ dă $-6a_2b^3$.

9. *Gradul* unui termin dintr'o espresiune algebrică, este suma factorilor literali ai acestui termin, sau încă suma esponenţilor literilor ce intră in scrierea sa. Aşa in polinomul:

$$5a^3b_2 - 6a^3b^4+7a^2b^5-8abc^3,$$

terminul ântêiu $5a^3b^2$ – şi cel din urmă $-8abc^3$ sunt de al cincilea grad, terminii intermediari $-6a^3b^4, +7a^2b^5$, de al şeptelea grad.

10. Când toţi terminii unei espresiuni sunt de acelaş grad, espresiunea se ḑice *omogenă*. Aşa polinomul

$$5a^3b^2+6a^2b^3-7ab^4+8b^5,$$

este un polinom omogen, de al cincilea grad.

Gradul unui polinom omogen, poartă in special numele de *grad de omogeneitate*. Astfeliu in esemplul precedinte, 5 este gradul de omogeneitate al polinomului.

11. Un polinom se ḑice *ordinat* după potenţele unei litere, când diferiţii sei termini sunt scrişi, după ordinea crescêtoare sau descrescătoare a potenţelor acestei litere. Aşa polinomul

$$5x^5-4x^4+3x^3-2x^2+x+1,$$

este ordinat după potenţele descrescătoare ale literei x. Litera după acăreia potenţe este făcută ordinarea polinomului, se numesce litera *principală* sau *ordinatrice*. Polinomul se ḑice *complet*, când conţine toate potenţele literei ordinatrice, incepênd de la cea mai inaltă; in casul contrariu se ḑice *necomplet*. Aşa polinomul

$$3a^4-4a^3+5a^2-6$$

in care lipsesce potenţa ântêia a literei ordinatrice a, este un polinom necomplet.

12. O espresiune algebrică se ḑice *intreagă*, când nici una din literile ce cuprinde nu intră ca divisor, coeficienţii numerici putênd fi or-cari; in casul contrariu espresiunea se ḑice *fracţionară*. Astfeliu $5a^3b^2-6a^4b+7a^5$, este o espresiune intreagă; $\frac{a-b}{5a_2b}$ este fracţionară.

13. O espresiune algebrică se numesce *iraţională*

cănd cuprinde indicaţiunea unei estrageri de râdăcină. Aşa espresiunea $5\sqrt{b^2-c}+7ab$, este o espresiune iraţională. In casul contrariu espresiunea se ḑice *raţională.*

14. Cănd literilor cuprinse într'o espresiune algebrică, li atribuim valori numerice, şi efectuăm operaţiunele ce sunt indicate asupra lor, resultatul ce dobăndim, este ceia ce se numesce *valoarea numerică* a espresiunei.

Aşa spre esemplu valoarea numerică a espresiunei

$$5ab^2+\frac{3}{4}\cdot c^3+5.$$

pentru $a=1$, $b=3$, $c=4$, va fi:

$$5.1.3^2+\frac{3}{4}.\ 4^3+5=45+48+5=98.$$

15. Se dă nume de *valoarea absolută* a unei cătimi algebrice, valoarei numerice a acestei cătimi, luată fără nici un semn, şi de *valoare relativă,* valoarei sale numerice precese de semnul $-$. Astfeliu valoarea absolută a cătimei - $5a^2b$, pentru $a=3$, $b=4$ este 5.3^24 sau 180; valoarea sa relativă este—180.

Despre cuantităţile negative

16. Algebra urmărind resultate generale in cercetările sale, consideră cuantităţile nu numai din puntul de vedere al mărimei lor absolute, dar şi al modului lor de a fi. In adevăr dacă considerăm pe o linie dreaptă X'X distanţele unui punt mobil M de un punt fics A, luat ce origină, aceste distanţe vor pute fi situate la stănga sau la dreapta puntului A, după cum mobilul se va fi mişcatu intr'un sens sau intr'altul. Această posibilitatea de situaţiune simetrică a distanţei puntului

M' 5 A 5 M.

x' x

mobil de puntul A, constitue pentru această din urmă cătime două moduri de esistinţă opuse; şi este evident că pentru a determina posiţiunea puntului M in raport cătră originea A, nu va fi de ajuns a cunoasce numai distanţa sa numerică de puntul fics; a ḑice spre esemplu că distanţa mobilului M de origină este de 5 me-

tri, nu este a ficsà posiţiunea acestui punt, mobilul putĕndu-se atunci aflá in *M* sau in *M'*. Pentru a determina pe deplin posiţiunea puntului *M*, va mai trebui a scí dacă el se află la dreapta sau la stănga originei adecă a cunoasce modul de a fi al distanţei sale. Aceastǎ necesitate de a ţiné seamǎ de diversitatea modului de a fi al cătimelor de aceiaşi specie in cestiunile ce ni putem propune asupra lor, se satisface in algebră, convenind a insemnà cu semnul + cătimile ce-au un mod oare-care de esistinţă, şi cu semnul— pre acele cari au un mod de esistenţa contrariu. Cele d'ăntăiu se denumesc cu numirea de *cătimi positive* şi celelalte, cu acea de *cătimi negative*.

17. *Nota.* Se poate dar ḑice că semnul —,are o duplă semnificaţiune in alegebră; 1º de a indicá operaţiunea subtragerei unui numĕr din altul: 2º a indicà negativitatea unei cătimi, adecă unul din modurile de a fi ale unei cătimi care este de natură a admite douĕ moduri de esistenţă opuse. Aceste douĕ semnificaţiuni ale semnului —, sunt ănse in acord. In adevĕr, continuănd a considerà esemplul citat al mişcărei unui mobil pe o linie dreaptă, şi convenind a insemnà cu semnul + distanţele percurse in direcţiunea X'X şi cu semnul —, acele percurse in direcţiunea contrară, vom avé, după această convenţiune, pentru distanţa x a mobilului *M* de origină, in ipotesa că acest mobil s'a mişcat din A in B, din B in C şi apoi din C in D, $x = + AB + BC - CD$. Adecă distanţa totală este ecuale cu suma

. x . M. X.
x A + B D C x

distanţilor parţiale. Ănsĕ de altă parte raţionănd in mod indepedent de convenţiunea semnelor, relativ la modul de a fi al mărimilor considerate, este vederat că pentru a avé diştanţa x a mobilului *M* de origină, va trebuì, presupunĕrd că puntul A este luat ast feliu ca in tot cursul mişcărei sale mobilul *M* să se afle la dreapta acestui punt, din suma drumurilor corespunḑĕtoare la mişcarea care a depărtat mobilul de origină, a scădé drumurile corespunḑĕtoare la mişcarea care a

apropiet mobilul de acest punt, ceia ce va conduce la aceiaşi espresiune algebrică de mai sus, pentru valoarea distanţei x. Aceiaşi observaţiune se poate face pentru usul semnului $+$.

Acest din urmă semn, considerat ca indicând modul de a fi al unei cuantităţi, este in acord cu intrebuinţarea sa ca semn al adiţiunei. In adevĕr dacă in esemplul precedent presupunem că un mobil mişcându-se in direcţiunea X'X

X' A B C D X

s'a transportat din A in B, din B in C şi apoi din C in D, vom avè pentru distanţa x a mobilului de puntul fics A

$$x = +AB + BC + CD.$$

in care semnul $+$ arată modul de a fi al drumurilor parţiale descrise toate în direcţiunea x'x. Dacă acum facem abstracţiune de convenţiunea de a represinta prin semnul $+$ modul de a fi al drumurilor descrise de la stânga la dreapta, ci observăm numai că mobilul plecând din puntul fics A, se mişcă in acciaşi direcţiune depărtându-se întru una de punctul seu de plecare, vom avé pentru distanţa finală x a acestui mobil de origina A, aceiaşi espresiune

$$x = AB + BC + CD.$$



CARTEA I.

DESPRE CALCULUL ALGEBRIC.

18. Calculul algebric are de obiect stabilirea regulilor după cari se esecută operaţiunile fundamentale: adiţiunea, sustracţiunea, multiplicaţiunea, divisiunea, redicarea la potenţe şi estragerea de rădăcini, când acestea se refer la cuantităţi algebrice.

19. Cuantităţile considerate in algebră putĕnd fi ânsĕ positive sau negative şi prin aceasta devenind mai generale de cât numerile absolute la cari se refer operaţiunile aritmetice, este necesariu a modificà definiţiunile acestora pentru ale dà un inţeles precis in toate casurile ce pot presintà cuantităţile algebrice.

Adunarea sau adiţiunea.

20. Scim că *adiţiunea*, astfeliŭ precum este definită in aritmetică are de obiect *fiind date două sau mai multe numere, a găsì un altul care să cuprindă toate unităţile cuprinse in numerile date.* Dacă am voì a ne servi de această definiţiune spre a adunà un numer positiv către un numĕr negativ, pentru esemplu pe $+2$ către -3 ne-am găsì intr'o imposibilitate; căci numerul căutat trebuind, după definiţiunea citată, a cuprinde toate unităţile numerilor date $+2$ şi -3, şi acestea conţinĕnd unitatea in moduri diferite, nu s'ar putè concepe in ce mod va trebuì a fi format numĕrul unic căutat.

21. Pentru a dà operaţiunei adiţiunei un inţeles lă-

murit in toate casurile cuantităţilor algebrice, vom admite ca evidente proposiţiunile următoare:

1⁰, *Adiţiunea a două cuantităţi de aceiaşi specie şi cu acelaşu mod de esistenţă, dă o a treia cuantitate a căreea valoare numerică este ecuale cu suma valorilor numerice ale acestora, şi al căreea mod de esistenţă este acelaş.*

2⁰ *Adiţiunea a două cuantităţi ecuali şi cu moduri de esistenţă opuse, dă un resultat ecuale cu zero.*

3⁰. *Adiţiunea sau intrunirea a două cuantităţi de aceiaşi specie dar cu moduri de esistenţă opuse dă o a treia cuantitate a căreia valoare numerică este ecuale cu diferinţa valorilor numerice ale acestora, şi al căreia mod de esistenţă este acelaş cu al celei mai mari in valoare absolută.*

Esemplul dejà citat al mişcărei unui mobil *m* pe o dreaptă X'X poate servì a ne dà o represintare grafică a acestor principii.

O 5 7 m

X' A B X

In adevĕr, dacă voim, 1⁰ a evaluà distanţa OB a mobilului m, care s'a mişcat mai ăntĕu de 5 metri, din O in A, şi apoi de 7 metri, din A in B in direcţiunea X'X, vom avè:

$$(+OA)+(+AB)=+OB=+OA+AB$$

sau $$(+5^m)+(+7^m)=+12^m\,;\ ^{*)}$$

sau însemnîndu spaţiele $+OA$, $+AB$ prin $+a$, $+b$ vom ave: $$(+a)+(+b)=+a+b.$$

Asemene dacă presupunem că mobilul *m*, plecănd din O s'a mişcat in direcţiunea contrariră XX' mai ăntĕiu de 5 metri din O in A' şi apoi de 7 metri din A' in B', este evident că vom avé, după convenţiunea făcută:

m O

X' B' A' X

$$(-OA')+(-A'B')=-OB'=-OA'-A'B'$$

Sau $$(-5^m)+(-7^m)=-12^m,$$

ceia ce pune in evidenţă ăntĕiul principiu.

---

*) Micile parintese care figurează in aceste ecualităţi, serv a a arătà mai bine semnul fiecăreia cuantităţi in parte.

2°. Dacă mobilul m plecănd din O, ajunge in A la depărtare de$+5$ metri şi se reintoarce in acest punt, este evident că distanţa sa finală de puntul sĕu de plecare este zero. Esprimĕnd succesiunea acestoră drumuri percurse, cari sunt ecuali şi de semn contrariu, vom avè:

$$(+OA)+(-OA)=\text{zero},$$

Sau $$(+5^m)+(-5^m)=0,$$

ceia ce e o representare a principilui al duoilea.

3°. Dacă din contra mobilul m ajuns in A la o distanţă de$+5$ metri de puntul O, se reintoarce percurgĕndu un drum AC de 7 metri in direcţiunea XX', este evident că oprindu-se in C, distanţa sa de O, va fi de duoi metri in direcţiunea XX' sau-2 metri. Ansĕ distanţa finală a mobilului nu-ĭ, precum vedem, de cât resultatul întrunireĭ distanţilor parţiale percurse succesiv, prin

m · 5

X' C O A X

urmare vom avè:

$$(+OA)+(-AC)=OA-AC=-OC,$$

Sau $$(+5^m)+(-7^m)=+5^m-7^m=-2^m.$$

22. *Adiţiunea monomilor.* Principiile precedenţi ne dau imediat mijlocul de a formà suma a douĕ cuantităţi algebrice or-cari. In adivĕr făcĕnd us de semnul$+$care serve a ĭndicà adiţiunea vom avè:

$$(+a)+(+b)=a+b \quad (1)$$
$$(-a)+(-b)=-a-b \quad (2)$$
$$(+a)+(-b)=a-b, \quad (3),$$

in cari membrii ai douilea $a+b$, $-a-b$, $a-b$, sunt sumele cuantităţilor cuprinse in membrii ăntĕi corespundetori. Este de observat ca ***espresiunile acestor sumi se obţin scriind cuantităţile respective una după alta cu semnul sĕu.***

23. De la formarea sumei a doue cuantităţi algebrice putem trece uşor la acea a unui numĕr or-care de aceste cuantităţi, căci spre a formà mai ăntĕiu suma a trei cuantităţi, va fi de ajuns a concepe formată suma celor ăntĕiu douĕ şi a representà prin o literă valoarea unică a acestei şumi, atunci cuantităţile propuse se vor reduce la douĕ şi adiţiunea lor va cădè in unul din casuri-

le cuprinse in ecualitățile (1), (2), (3). Servindu-ne de acest raționament vom trece de la adițiunea a trei la adițiunea a patru cuantități, și așa succesiv la acea a unui numĕr or-care de cuantități algebrice monoame. Vom avè astfeliu:

$$(+a)+(+b)+(+c)=a+b+(+c)=a+b+c$$
$$(+a)+(-b)+(-c)=a-b+(-c)=a-b-c$$
$$(+a)+(-b)+(+c)+(-d)=a-b+c+(-d)=a-b+c-d.$$

Espresiunile sumelor cuprinse in membrii din urmă, sunt formate după aceiașĭ regulă observată mai sus, ***scriind monomii propuși unul după altul cu semnul seu.***

24 *Adițiunea polinomilor*. Se trecem acum la formarea sumei a duoi polinomi. Fie-ne propus a adiționa polinomul $a-b+c-d$ cătră polinomul $g-h+e-f$. Acest cas se poate reduce la casul sumei a dŭoi monomi. In adevĕr represintănd valoarea ăntĕiului polinom prin $\pm P$, după cum suma terminilor positivi va fi mai mare sau mai mică decăt acea a terminilor negativi, și acea a polinomului al douilea prin $\pm P'$, vom avè:

$$(\pm P)\pm(\pm)P'=\pm P\pm P', \qquad (4)$$

in care substiduind lui $\pm P$, $\pm P'$ polinomii ce represintă ne va venì

$$(a-b+c-d)+(g-h+e-f)=a-b+c-d+g-h+e-f \quad (5)$$

ceia ce ni arată că ***suma a duoi polinomi*** P,P′ ***se formeză scriind in urma ăntĕiului polinom, terminii polinomului al doilea fie care cu semnul sĕu.***

Este evident că va fi de ajuns a repetà raționamentul făcut in adițiunea monomilor, pentru a estinde această regulă la casul adițiunei unui numĕr or-care de polinomi algebrici.

25. Putem dar definì ***adițiunea algebrică, o operațiune care arè de scop, fiind date douĕ sau ma multe cuantități algebrice or-cari, a le intruni în una singură, scriindu-le una după alta și conservănd terminilor fie-cărei semnele lor.***

26. Espresiunea sumei a maĭ multor cuantități algebrice se simplifică cănd aceste cuprind termini simili. Simplificarea consistă in reducțiunea acestor termini.

Esemple: I,

$$\begin{array}{l} +5ab \\ -3a^2c \\ -4ab \\ +7a^2c \end{array}$$

suma. $5ab-3a^2c-4ab+7a^2c=ab+4a^2c$;

II.

$$\begin{array}{l} 10ax^2-5a^2x+9abc+7 \\ 8ax^3+8ax^2-3a^2x-7a^2c \\ +9ax^3+4ax^2-8a^2c-9 \end{array}$$

suma $17ax^3+22ax^2-8a^2x-15a^2c+9abc-2$.

27. *Nota*. Cuantitățile ce intră intr'o adițiune algebrică putênd fi positive sau negative, adițiunea lor nu mai cuprinde ideea de crescere ca in casul adițiunei aritmetice; de aceia se dă nume de *sumă algebrică* resultatului adițiunei mai multor cuantități luate cu semnele lor, și se reservă numele de *sumă aritmetică* sumei acestor cuantități considerate in valoarea lor absolută.

Esemplu. Suma algebrică a monomilor $+3a, -5b, +3c, -7d$ este espresiunea $(+3a)+(-5b)+(+2c)+(-7d$ sau $3a-5b+2c-7d$ pe când suma aritmetică a acelorași cuantități va fi

$$(3a)+(5b)+(2c)+(7d).$$

Subtragerea sau sustracțiunea.

28. *Sustracțiunea este o operațiune inversă a adițiunei, ea are de scop fiind dată suma a două cuantități și una din ele, a găsî pe ceilaltă, căreia să dă nume de rest sau diferență.*

Regula pentru formarea cuantității căutate in această operațiune se deduce ușor din insăși definițiunea dată. In adevĕr restul trebuind a fi astfel că adiționându-l către a doua cuantitate resultatul obținut să fie ecuale cu ănteia, și acest resultat obținându-se după regula adițiunei algebrice prin scrierea către terminii restului pe acei ai cuantității adoua, este evident că espresiunea acestui rest va trebuí, afară de terminii sumei date, să conțină toți terminii celeilalte cuantități cu semn contrariu, prin urmare *restul căutat se va formă scriind*

in urma celei d'ăntĕiu cuantităţi date, terminii cuantităţei a doua cu semn contrariu. (*

Această regulă este aplicabilă in toate casurile cuantităţilor algebrice, ca şi regula adiţiunei.

Esemple. 1⁰. Din cuantitatea $+a$ a substrage $+b$; vom ave făcĕnd us de semnul—, ce serve a indicà operaţiunea substragerei

$$+a-(+b)=a-b.$$

2⁰. Vom avé asemenea

$$+a-(-b)=a+b.$$

3⁰. Din polinomul $7a^4x^3-6a^5x^2+5a^6x-4a^7+3$ a subtrage $9a^5x^2-8a^6x+3a^4-5$; vom avé aplicând regula

$$\begin{array}{ll} 7a^4x^3-6a^5x_2+5a^6x & -4a^7+3 \\ -9a^5x^2+8^9x & -3a^4+5 \\ \hline \end{array}$$

Restul$=7a^4x^3-15a^5x^2+13a^6x-4a^7-3a^4+8.$

29. Decăte ori polinomii daţi cuprind termini simili, dispositiunea din urmă este preferabilă, căci inlesnesce operaţiunea reducţiunei.

Nota. Sustracţiunea algebrică nu atrage după sine, in mod necesariu ideea de scădere, precum adiţiunea algebrică nu cuprinde pe acea de crescere, ceia ce am vĕḑut. In adevĕr, cănd dintr'o cuantitate positivă se propune a se subtrage una negativă, resultatul este o cuantitate positivă mai mare de căt fiecare din cuantităţile date.

Esemplu. $+8-(-7)=+15.$

Astfeliu o sustracţiune algebrică poate ecuivalà cu o adiţiune aritmetică.

Immulţirea sau multiplicaţiunea.

30. *Immulţirea algebrică este o operaţiune care are de scop, find date douĕ cuantităţi una numită multiplicănd sau immulţit, alta multiplicător sau immulţitor, a găsi o atreia cuantitate numită product care să fie compusă în mărîme şi in semn cu multiplicandul precum multiplicatorul este compus cu unitatea positivă.*

(*) Pentru scurtarea vorbirei, cuantităţeĭ întĕĭ îĭ putem dà numirea de *subtrasul* şi celeĭ adoua de *subtrăgĕtorul.*

Multiplicațiunea monomilor. Fie mai ăntĕiu dați a se îmmulți duoi monomi, ori-cari, spre esemplu,

$$5ab^2c^3d \text{ prin } 7a^2b^4c,$$

pre care'i considerăm ca representănd numere absolute. Luănd pre întăiul ca multiplicand și pre al duoilea ca multiplicător, productul lor se va forma, in virtutea definițiuneĭ, din multiplicandul $5ab^2c^3d$, precum multiplicătorul $7a^2b^4c$, s'a format din unitate. Ănsĕ avem

$$7a^2b^4c = 1\ .7.a.^2b.^4c\ ;$$

ceia ce ni arată că multiplicatorul s'a format din unitate immulțind'o succesiv prin factorii 7, a^2 b^4, c. Insemnănd dar prin P productul căutat vom avé:

$$P = (5ab^2c^3d).\ 7.\ a^2.\ b^4.c\ ;$$

Sau $$= 5.a.b^2.c^3.d.7.a^2.\ b^4.c\ ;$$

sau ăncă schimbănd ordinea factorilor, ceia ce este permis după o teoremă cunoscută din aritmetică, ni va venì

$$P = 5.\ 7.\ a.\ a^2.b^2.b^4.c^3.c.d.$$

Ănsĕ prin semnificațiunea esponenților avem

$$a.\ a.\ a = a^3$$
$$b.\ b.\ b.\ b.\ b.\ b = b^6$$
$$c.\ c.\ c.\ c = c^4\ ;$$

prin urmare espresiunea productuluĭ P se va redŭce la

$$P = 5.7.\ a^3.\ b^6.\ c^4.\ d$$

Sau $$P = 35a^3b^6c^4d. \qquad (6)$$

Punĕnd in loculĭ lui P, productul $(5ab^2c^3d) \times 7a^2b^4c)$ ce representă prin abreviațiune, vom avé in fine

$$(5ab^2c^3d) \times (7a^2b^4) = 35a^3b^6c^4d. \qquad (7)$$

Această ecualitate ni arată că *productul al duoi monomi or-cari se formează immulțind mai ăntĕiu coeficienții lor numerici, și scriind in urma productului lor fie-care literă c'un esponent ecuale cu suma esponenților ce are in ambi monomi.*

31. Regula precedinte ne va permite a forma productul unui numĕr or-care de monomi.

In adevăr productul al trei monomi se va reduce la acela al duoi monomi, substituind celor d'ăntĕi duoi productul lor efectuat.

Esemplu.
$(5a^2b^3c)\times(8ad)\times(7bc^4)=(40a^3bc^3d)\times(7bc^4)=280a^3 b^4c^5d$.

Procedĕnd astfeliu, vedem că *productul unui numĕr or-care de monomi, se va forma immulţind coeficienţii lor numerici şi scriind fie care literă c'un esponent ecuale cu suma esponenţilor ce are in diferiţii monomi.*

Esemplu.
$(2a^mb^nc)\times(3a^pb^qd)\times(4e^rf)\times(5eg)=120a^{m+p}b^{n+q}e^{r+1}cdg$.

32. ***Redicarea la potenţa.*** Regula immulţirei monomilor ne poate servi a formà potenţa or care a unui monom dat. Fie in adevăr propus a redicà la a 5^a potenţă monomul

$$3a^mb^n,$$

vom avé:
$(3a^mb^n)^5 = 3a^mb^n)\times(3a^mb^n)\times(3a^mb^n)\times(a^mb^n)\times3a^mb^n$
Sau $(3a^mb^n)^5=3.\ 3.\ 3.\ 3.\ 3.\ a^m.\ a^m.\ a^m.\ a^m.\ a^m.\ b^n.\ b^n.\ b^n.\ b^n.\ b^n$.sau in fine $(3a^mb^n)^5=243a^{5m}b^{5n}$
ceia ce ne arată că *spre a ridica un monom la o potenţă cerută, este de ajuns a ridica coeficientul sĕu numeric la acea potenţă, şi a immulţi esponenţii literilor prin gradul potenţei.*

33. ***Regula semnelor.*** In immulţirile precedinţi, am considerat monomii daţi ca ne-avĕnd nici un semn; ănsĕ aceştia, mărginindune la casul immulţirei a duoi monomi, pot să fie sau ambii positivi, sau ambii negativi sau unul positiv şi altul negativ, şi atunci remăne de sciut care va fi semnul productului lor. Pentru aceasta este de ajuns a observà ca in virtutea definiţiunei immulţirei algebrici, productul trebuind a se compune in mărime şi in semn cu multiplicandul precum multiplicatorul este compus cu unitate positivă, semnul sĕu va fi semnul multiplicandului, cănd semnul multiplicătorului va fi acel al unităţei positive adică +; din contra semnul productului va fi contrariu cu acel al multiplicandului cănd semnul multiplicătorului va fi contrariu semnului unităţei positive, adică—. Punĕnd intr'un tablou diferitele casuri ce se pot presintà, vom avé:

Multiplicandul	*Multiplicatorul*	*Productul*
+	+	+
—	—	+
—	+	—
+	—	—

de unde deducem regula: ***Semnul productului al duoĭ factori algebrici este + sau —, după cum factoriĭ au semne asemene sau semne contrarii.***

Vom avè astfeliu

$$(+a).\ (+a) = +ab$$
$$(-a).\ (-b) = +ab$$
$$(+a).\ (-b) = -ab$$
$$(-a).\ (+b) = -ab.$$

34. Regula semnelor se mai enunţă, prin abreviaţiune, in modul următoriu:

Plus cu plus dă plus la immulţire
minus cu minus dă plus
plus cu minus dă minus
minus cu plus dă minus.

Nota. După această regulă semnul productului al mai multor factori positivi va fi totdeauna +, iar al unui product al mai multor factori negativi va fi + sau —, după cum numĕrul factorilor va fi păreche saŭ nepăreche. In adevăr immulţind factorii duoi căte duoi vom avé:

$$(-a)\ (-b).\ (-c).\ (-d) = (+ab).\ (+cd) = +abcd$$

$$(-a).\ (-b).\ (c\ -c)\ (-d),\ (-e] = [+ab].(+cd).\ (-e) =$$
$$(+abcd).\ (-e) = -abcde$$

De asemene potenţa a m^a unui numĕr negativ $(-a)$ va avé semnul + sau — după cum gradul m al potenţei va fi păreche sau nepăreche. Vom avé astfeliu:

$$(-a)^m = \pm a^m.$$

35. ***Immulţirea polinomilor.*** In immulţirea polinomilor sunt duoĕ casuri principale de distins, după cum multiplicandul şi multiplicatorul sunt ambii polinomi, sau numai unul din ei.

Considerăm mai ănteiu casul immulţirei unui polinom printr'un monom care este casul cel mai simplu.

Fie a se immulţi polinomul $(a+b-c+d)$ prin monomul positiv m. Distingem trei casuri, după cum monomul *m* este,

1⁰ un numĕr intreg

2⁰ o fracţiune de forma $\frac{1}{r}$

3⁰ o fracţiune de forma $\frac{n}{r}$

In casul ănteiu multiplicatorul *m* fiind format prin adiţiunea unităţei de *m* ori cătră sine însuşi, productul immulţirei $(a+b-c+d)$. m se va formà adiţionănd multiplicandul $a+b-c+d$ de m ori cătră sine însuşi, ceia ce se va face adiţionănd de m ori cătră sine însuşi pe fie care din părţile sale, şi aceasta va dà

$$ma+mb-mc+md:$$

prin urmare vom avé:

$$(a+b-c+d)\times m=am+bm-cm+dm. \quad (8)$$

In al duoilea cas m find ecuale cu fracţiunea $\frac{1}{r}$ adică cu a r^a parte din unitate, productul căutat va trebuì a fi a r^a parte a multiplicandului

adicĕ
$$\frac{a+b-c+d}{r}=\frac{a}{r}+\frac{b}{r}-\frac{c}{r}+\frac{d}{r}$$

căci in virtutea ecualităţei (8) avem

$$\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{r}-\frac{c}{r}+\frac{d}{r}\right)r=a+b-c+d.$$

Prin urmare

$$(a+b-c+d).\frac{1}{r}=\frac{a}{r}+\frac{b}{r}-\frac{c}{r}+\frac{d}{r} \text{ sau } a\frac{1}{r}+b\frac{1}{r}-c\frac{1}{r}+d\frac{1}{r} \quad (9)$$

căcĭ putem scri
$$\frac{a}{r}=\frac{a.1}{r}=a.\frac{1}{r},$$

$$\frac{b}{r}=\frac{b.1}{r}=b.\frac{1}{r}, \&.$$

Vom avé astfeliu, punĕnd m in locul fracţiunei $\frac{1}{r}$,

$$(a+b-c+d).\ m=am+bm-cm+dm.$$

In al triilea cas multiplicatorul *m* fiind ecuale cu o fracţiune $\frac{n}{r}$ adicĕ conţinĕnd de *n* ori a r^a parte a unităţei, productul immulţirei polinomului $(+b-c+d)$ prin monomul m, va trebui a fi ecuale cu n ori a r^a parte a multiplicandului, ceia ce va dà:

$$(a+b-c+d)\frac{n}{r}=\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{r}-\frac{c}{r}+\frac{d}{r}\right)n=\frac{an}{r}+\frac{bn}{r}-\frac{cn}{r}+\frac{dn}{r},$$

sau

$$(a+b-c+d)\ \frac{n}{r}=\frac{a.n}{r}+\frac{b.n}{r}-\frac{c.n}{r}+\frac{d.n}{r};\ \text{ânsă}\ \frac{n}{r}=m$$

prin urmare

$(a+b-c+d)\ m=am+bm-cm+dm.$

Aşa dar in toate casurile ***productul immulţirei unui polinom printr'un monom, se formează immulţind succesiv terminii polinomului prin monom, şi făcĕnd suma algebrică a productelor parţiale astfelîu obţinute.***

Nota. Este uşor de vĕḑut cum se va formà productul in casul cănd monomul *m* va fi un numĕr negativ. In adevĕr semnul multiplicatorului fiind atunci contrariu cu al unităţei positive, semnul productului va trebuì a fi contrariŭ cu al multiplicanduluĭ; prin urmare va fi de ajuns o operà ca in casul lui *m* positiv, cu condiţiune de a schimbà semnele terminilor polinomului multiplicand.

Esemplu:

$$(5a-3b+6c)\times(-7ab1c)=(-5a+3b-6c).\ 7abc=-35a^2bc+2ab^2c4-2abc^2.$$

36. Trecem la casul cănd multiplicandul şi multiplicatorul sunt ambii polinomi.

Fie a se immulţi polinomul $(a+b-c)$ prin polinomul $(d+g\ \ h)$. Representănd multiplicatorul $(d+g-h)$ pirn o sigură literă M, vom reduce casul propus la casul precedinte al immulţirei unuĭ polinom printr'un monom, şi vom avé:

$$(a+b-c).M=aM+bM-cM.$$

Substituind lui M polinomul $d+g-h$ ce represintă, ni va venì

$$(a+b-c)(d+g-h)=a(d+g-h)+b(d+g-h)-c(d+g-h)=ad+ag-ah+bd+bg-bh-(cd+cg-ch);$$

sau ăncă făcĕnd sustracţiunea arătată in al duoilea membru şi schimbănd ordinea terminilor, ceia ce nu schimbă valoarea polinomului, vom avé in fine.

$$(a+b-c)(d+g-h)=ad+bd-cd+ag+bg-cg-ah-bh+ch.$$

Aşa dar *productul immulţirei unui polinom prin alt polinom, se formează immulţind polinomul multiplicand succesiv prin terminii polinomului multiplicator, şi făcĕnd suma productelor parţiale, luate fie-care cu semnul determinat după regula semnelor.*

37. Esemple. Fie a se immulţi polinomul $10a^3b+8a^2b^2-7a$ prin $5a^2+2b+3$. Scriind multiplicatorul subt multiplicand, ca la immulţirea aritmetică, şi aplicând regula precedinte, vom avè:

Multiplicandul	$10a^3b+8a^2b^2-7a$
Multiplicătorul	$5a^2+2b+3$
Productele parţiale	$50a^5b+40a^4b^2-35a$
	$+20a^3b^2+16a^2b^3-14ab$
	$+30a^3b+24a^2b^2-21a$

Pro. total $50a^5b+40a^4b^2-35a^3+20a^3b^2+30a^3b+16a^2b^3+24a^2b^2-14ab-21a.$

Espresiunea productului total se poate pune subt o formă mai simplă punĕnd in factor comun potenţile literei a după care este ordinat acest polinom.

Punerea in factor comun a unei cuantităţi care intră in mai mulţi termini ai unei espresiuni, consistă in a suprime această cuantitate in aceşti termini şi a indicà immulţirea prin ea a resultatului astfeliu obţinut. Procedĕnd in acest chip polinomul precedinte se va scrì:

$$(50a^5b+40a^4b^2)+(20b^2+30b-35)a^3+(16b^3+24b^2)a^2-(14b+21)a.$$

Cuantitățile cuprinse aice in parintese se consideră ca coeficienți ai potenților respective ale literei a. Uneori factorul comun se desparte prin o linie verticală de coeficientul său, ai căruia termini se scriu atunci unul sub altul. Aplicănd, acest mod de punere in factor comun, polinomului ce precede, vom avè:

$$\begin{array}{lllllll} 50a^5b+40a^4b^2 & +20b^2 & a & +16b^3 & a^2 & -14b & a \\ & +30b & & +24b^2. & & -21 & \\ & -35 & & & & & \end{array}$$

38. *Nota*. Regula găsită pentru determinarea semnului unui product al duoă cuantități algebrice or-cari, este o consecință a modificațiunei introdusă in definițiunea immulțirei. Pentru a ne asigurà că această modificare este in acord cu scopul de generalisare ce se caută in resultatele operațiunilor algebrice, este de ajuns a luà casul particulariu al immulțirei a două cuantități algebrice, la care se poate aplicà definițiunea immulțirei aritmetice, și a esaminà apoi, sub ce condițiune espresiunea productului astfeliu obținut, va represinta in toate casurile posibile, productul cuantităților propuse.

Fie de immulțit polinomul (A—B) prin polinomul (C—D), in cari A, B, C, D sunt cătimi positive și

$$A > B$$
$$C > D.$$

Este evident că, in această ipotesă, definițiunea immulțirei, astfeliu precum se dă in aritmetică, combinată cu regula sustracțiunei algebrice, va fi de ajuns pentru a formà productul immulțirei.

$$(A-B)\times(C-D).$$

Vom avé

$$(A-B)(C-D)=A(C-D)-B(C-D)=AC-AD)-(BC-BD), \text{ sau } (A-B).(C-D)=AC-AD-BC+BD. \quad (10)$$

Remăne acum de esaminat sub ce condițiune, espresiunea din al duoilea membru va represintà productul

immulţirei indicate in membrul ăntĕiu, in toate ipotesele ce se pot face asupra cuantităţilor A, B, C, D.

Fie 1^0. $A < B$
$C < D$.

Factorii A—B, C—D sunt ambii negativi impreună cu (AC—AD), şi (BC—BD); ănsă valoarea absolută a binomului AC—AD este mai mică decăt acea a binomului BC—BD, căci $A < B$; prin urmare diferinţa

$$(AC-AD)-(BC-BD)$$

va fi o cuantitate positivă; prin urmare pentru ca espresiunea

$$AC-AD-BC+BD$$

să represinte in casul de faţă productul immulţirei lui A—B prin C—D, va trebuì a admite că *produl immulţirei a duoĕ cuantităţi negative este o cuantitate positivă.*

Fie 2^0 $A < B$
$C > D$.

Atunci C—D va fi positiv şi A—B negativ. (AC—AD) (BC—BD) vor fi de asemene cuantităţi positive, ănsă vom avè

$$AC-AD < BC-BD,$$

căci $A < B$. Prin urmare AC—AD—BC+BD va fi o cuatitate negativă; aşa dar espresiunea AC—AD—BC +BD va represintà, şi in acest cas, productul imulţirei lui (A—B) prin (C—D) cu condiţiune de a admite *că productul a duoi factori cu semne contrarii este negativ.*

Fie in fine 3^0 $A > B$
$C > D$.

Acest cas intră in cel precedinte, căci unul din factori este positiv, celalalt negativ şi espresiunea membrului al douilea iarăşi o cuantitate negativă. Ecualitatea (10) va esista subt aceiaşi condiţiune.

Aşa dar pentru ca membrul al duoilea al acestei ecualităţi să represinte in toate casurile posibile productul

immulţirei indicate in membrul ăntĕiu, cu alte cuvinte pentru ca *formula* *) constituită de această ecualitate să fie generala, trebuie a conveni că ***productul al duoi factori este positiv sau negativ după cum semnele factorilor sunt asemene sau contrarii.***

Această convenţiune nu e alta de căt ănsăşi regula semnelor dedusă din definiţiunea immulţireĭ, prin urmare această definiţiune cuprinde toată generalitatea cerută de formulele algebrice.

39. ***Teorema I.*** ***Când duoi polinomi sunt ordinaţi după potenţile crescĕtoare ale aceleiaşi litere, terminii estremi ai productului lor ordinat in acelaş mod provin respectiv, fără nici o reducţiune, din immulţirea terminilor estremi ai multiplicandului şi multiplicatorului.***

In adevĕr dacă polinomii propuşi sunt ordinaţi, spre esemplu, după potenţile descrescătoare ale aceleieşi litere, este evident că terminul ăntĕiu al productului ordinat in acelaş mod, trebuind a avè gradul cel mai inalt va proveni din immulţirea terminilor de gradul cel mai inalt din multiplicand şi multiplicator, adicĕ din immulţirea terminilor ăntĕi. Terminul din urmă al productului trebuind de asemene, după modul de ordinare presupus, a fi de gradul cel mai mic, va proveni din immulţirea terminilor de gradul cel mai mic din multiplicand şi multiplicator, adicĕ a terminilor din urmă.

Esemplu.

$$\begin{array}{r}5ax^3+4a^2x^2-3a^3x+2a^4\\ +2ax^2-3a^2x+5a^3\\ \hline 10a^2x^5+8a^3x^4-6a^4x^3+4a^5x^2\\ -15a^3x^4-12a^4x^3+9a^5x^2-6a^6x\\ +25a^4x^3+20a^5x^2-15a^6x+10a^7\\ \hline 10a^2x^5-7a^3x^4+7a^4x^3+33a^5x^2-21a^6x+10a^7\end{array}$$

40. ***Teorema II.*** *Productul al duoi polinomi omogeni*

---

*) O formulă este o ecualitate in care unul din membrii esprimă operaţiunile ce sunt de făcut asupra unor cuantităţi cunoscute sau numai presupusĕ ca atare pentru a formà valoarea cuantităţeĭ din celalalt membru.

este un polinom omogen al cărui grad de omogeneitate este ecuale cu suma gadelor polinomilor propuşi

După regula immulţirei polinomilor un termin or-care al productelor parţiale, din ale căror sumă resultă productul total, provine din immulţirea unui termin al multiplicandului prin un termin al multiplicatorului; ănsă prin ipotesă, aceşti duoi polinomi sunt compuşi respectiv prin termini de acelaş grad, prin urmare productul total va fi el insuşĭ compus prin termini cari voavè un grad constant ecuale cu suma gradelor polinomilor propuşi.—Immulţirea precedinte ni presintă un esemplu relativ la această teoremă.

41. ***Teorema III.*** *Productul immulţirei algebrice a duoĭ polinomi compuşi unul de* m *altul de* n *termini cuprinde cel puţin duoi, cel mult* mn *termini.*

Această teoremă este o consecinţă a regulei immulţirei polinomilor şi a teoremei anteprecedinţĭ.

Esemple I.

$$\begin{array}{r} x^{m-1}+x^{m-2}+x^{m-3}+\ldots+x+1 \\ x-1 \\ \hline x^m+x^{m-1}+x^{m-2}\ldots+x^2+x \\ -x^{m-1}-x^{m-2}-\ldots-x-1 \\ \hline x^m-1. \end{array}$$

II. $(a+b+c)(a'+b')=aa'+ba'+ca'+ab'+bb'+cb'$.

42. ***Formarea productului unui numer or-care de polinomi.***

Productul unui numĕr or-care de polinomi se formează, immulţind productul celor d'ăntĕi duoi polinomi prin al treilea; productul astfeliu obţinut prin al patrulea şi aşa mai departe.

In acest mod vom avè:

$$(a+b)\ (c+d)\ (e+f)\ (g+h)=(ac+bc+ad+bd)\ (e+f)\ (g+h)$$

$$=(ace+bce+ade+bde+acf+bcf+adf+bdf)\ (g+h)$$

$$=aceg+bceg+adeg+bdeg+acfg+bcfg+adfg+bdfg$$
$$+aceh+bceh+adeh+bdeh+acfh+bcfh+adfh+bdfh.$$

Când toţi polinomii propuşi sunt ecuali intre ei, atunci

productul lor se transformă in potență. Dacă in esemplul precedinte am avé

$$a+b=c+d=e+f=g+h$$

atunci membrul ăntĕiu s'ar transformá in potența a-4ª a binomului (a+b), și membrul al duoilea, substituind lui c, e, g pe a și lui d, f, h pe b ar fi espresiunea acestei potențe, căreia in special se dă numele de *desvoltare* sau *desvĕlire.*

43. ***Patratul și cubul unui binom.*** Aplicănd regula immulțirei avem:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2, \quad (11)$$

ceia ce ni arată că *patratul unui binom este ecuale cu patratul terminului ănteiu plus de doué ori productul terminului ănteiu prin al duoilea, plus patratul tèrminului al duoilea.*

Această formulă se mai enunță in modul următoriu: *Patratul sumei a două cuantități, este ecuale cu suma patratelor acestor cuantități plus îndoitul lor product.*

Operațiunea immulțirei, ni dă de asemenea formula

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2, \quad (12)$$

care se enunță: *Patratul diferenței a două cuantități este ecuale cu suma patratelor acestor cuantități minus de două ori indoitul lor product.*

$$(a+)(a-b)=a^2-b^2, \quad (13)$$

formulă care se enunță in modul următoriu: *Productul sumei a două cuantități prin diferența lor este ecuale cu diferința patratelor lor.*

Immulțind ambii membri ai formulei (14) prin (a+b), vom obținé

$$(a+b)^3=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab+b^3$$

sau $$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \quad (14)$$

Procedĕnd in acelaș mod asupra formulei (12) găsim

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3a^2b-b^3.$$

Formulele precedinți se presintă dese-ori in calculul algebric; este dar necesariu a le ține minte.

O aplicațiune a acestor formule intĕlnim in immulțirea următoare:

$$\begin{array}{ll}
\text{Multiplicandul} & \begin{array}{c}+a\\-b\end{array}x^2+\begin{array}{c}b\\-c\end{array}x+\begin{array}{c}a\\+b\end{array}\\[2ex]
\text{Multiplicatorul} & \begin{array}{c}+a\\+b\end{array}x+\begin{array}{c}b\\-c\end{array}\\[2ex]
\text{Productele parțiale} & \left\{\begin{array}{l}\begin{array}{c}+a^2\\-b^2\end{array}x^3+\begin{array}{c}+ab\\-ac\\+b^2\\-bc\end{array}x^2+\begin{array}{c}a^2\\+2ab\\+b^2\end{array}x\\[2ex]
\qquad\quad\begin{array}{c}+ab\\-b^2\\-ac\\+bc\end{array}x^2+\begin{array}{c}b^2\\-2bc\\+c^2\end{array}x+\begin{array}{c}ab\\+b^2\\-ac\\-bc\end{array}\end{array}\right.\\[2ex]
\text{Productul total} & \begin{array}{c}+a^2\\-b^2\end{array}x^3+\begin{array}{c}2ab\\-2ac\end{array}x^2+\begin{array}{c}a^2\\+2b^2\\+c^2\\+2ab\\-2bc\end{array}x+\begin{array}{c}ab\\+b^2\\-ac\\-bc\end{array}
\end{array}$$

43. ***Patratul unui polinom.*** Formarea patratului unui polinom se deduce ușor din formula patratului unui binom.

Fie mai ăntĕiu propus a forma patratul unui trinom $a+b+c$. Representănd binomul $b+c$ prin s, și aplicănd formula (11), vom avé:

$$(a+b+c)^2=(a+s)^2=a^2+2as+s^2$$

in care substituind lui s valoarea sa, ni va vení

$$(a+b+c)^2=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc).$$

Traducĕnd această formulă in vorbire ordinară căpătăm teorema următoare: *Patratul unui trinom este ecuale cu suma patratelor terminilor sei, plus duplul sumei productelor lor luați căte doi.*

Pentru a demonstrá că această teoremă este generală, va fi de ajuns a demonstrá că find adevĕrată pentru un polinom de n termini, va fi adevĕrată şi pentru un polinom de n+1 termini; căci find adevĕrată, precum am vĕḑut, pentru un polinom de trei termini, va fi adevĕrată pentru un polinom de patru termini; find adevĕrată pentru un polinom de patru termini, va fi adevĕrată şi pentru un polinom de cinci termini, şi aşa indefinit.

Fie dar

$$(a+b+c+\ldots+k)^2=a^2+b^2+c^2+\ldots+k^2 \\ +2(ab+ac+\ldots) \quad (15)$$

in care presupunem că polinomul $a+b+c+.+k$ cuprinde *n* termini. Remăne de arătat că patratul polinomului

$$a+b+c+\ldots+k+l$$

compus din n+1 termini se formează in acelaş mod. Represintăm pentru acest scop, prin *s* suma celor n din urmă termini şi avem

$$(a+b+c+\ldots+k+l)^2=(a+s)^2=a^2+2as+s^2, \quad (16)$$

in care s find un polinom de n termini, avem prin ipotesă

$$s^2=(b+c+\ldots+k+l)^2=b^2+c^2+\ldots+k^2+l^2 \\ +2[bc+\ldots+bk+\ldots],$$

de unde formula (16) va deveni

$$(a+b+c+\ldots+k+l)^2=a^2+b^2+c^2+\ldots+k^2+l^2 \\ +2[ab+ac+\ldots].$$

Făcĕnd succesiv n=3, =4, =5, =6, & &, formula precedinte ne arată că teorema este adevĕrată pentru un polinom de 4, 5, 6, 7, & termini; prin urmare *patratul unui polinom or-care este ecuale cu suma patratelor terminilor sei, plus duplul sumei productelor lor, luaţi căte duoi*, ceia ce erá de demonstrat.

Esemplu. $(3x^3-5x^2+4x-2)^2=9x^6+25x^4+16x^2+4$

$$+2\times\begin{Bmatrix}-15x^5+12x^4-6x^3 \\ -20x^3+10x^2 \\ -8x\end{Bmatrix}$$

$$=9x^6-30x^5+49x^4-52x^3+36x^2-16x+4.$$

Impărțirea sau divisiunea.

45. *Divisiunea este o operațiune inversă a multiplicațiunei in care se dă productul al duoi factori algebrici și unul din ei, și se caută al duoilea factor.* Productul și factorul dați se numesc: *devidend* și *divisor*, iar factorul căutat *cuoțient* sau *câtu*.

46. ***Regula semnelor.*** Regula pentru determinarea semnului unui coțient algebric se deduce din definițiunea precedinte și din regula semnelor multiplicațiunei. Cuoțientul find in adevĕr unul din factorii dividendului al căruia celelalt factor este divisorul, *semnul sĕu va trebuí a fi ecuale sau contrariu cu al divisorului, după cum dividendul va fi positiv san negativ.*

Tabloul următor cuprinde toate casurile ce se pot presinta

Dividend	*Divisor*	*Cuotient*
+	+	+
—	—	+
+	—	—
—	+	—.

In practica divisiunei regula ce precede, se enunță abreviat, precum urmează:

+	cu	+	dă	+	la	cuoțient
—	...	—	...	+		...
—		+		—		

47. ***Divisiunea monomilor.*** In divisiunea unui monom prin alt monom, cuoțientul căutat nu poate fi decăt un monom, căci monomul divídend nu poate resultà decăt din immulțirea a duoi monomi. Pentru a găsì acest monom este de ajuns a observà că după difinițiunea divisiunei cuoțientul trebuie a fi astfeliu ca immulțindu-l prin divisor, resultatul obținut să fie ecuâle cu dividendul. De aice, in virtutea regulei immulțirei monomillor, urmează că:

1°. *Coeficientul dividendului este prductul coeficientului divisorului prin acel al cuoţientului*;

2°. *Esponentul unei litere din dividend este suma esponenţilor ce are această literă in divisor şi cuoţient*; prin urmare cuoţientul căutat se va forma impărţind *coeficientul dividendului prin acel al divisorului, scădind din esponentul fiecăriea litere a dividendului esponentul literei respective din divisor şi scriind cu esponenţii lor literile cari se află numai în dividend.*

Esemplu. $24a^4b^3c^2d : 3a^2bc = 8a^2b^2cd$.

48. *Nota.* Regula precedinte conţine in mod implicit condiţiunile de posibilitate ale divisiunei unui monom prin altul. Ea ni arată că pentru ca un monom să fie divisibil prin altul, cu alte cuvinte ca cuoţientul lor să fie un monom intreg, trebuie:

1° *coeficientul dividendului a fi divisibil prin acel al divisorului,*

2° *dividendul a conţine toate literile divisorului şi esponentul fie-căriea a fi mai mare decât esponentul literei respective din divisor.*

Când aceste condiţiuni nu sunt indeplinite cuoţientul divisiunei este un monom fracţionariu*) sau *fracţiune algebrică.*

Esemplu: $15a^3bc : 9a^5gh = \dfrac{15a^3bc}{9a^5gh}$.

49. Despre esponentul zero şi esponenţii negativi.

Fie dat a impărţi a^m prin a^n, in care m şi n sunt două numere or-cari intregi şi positive. Făcĕnd pentru

*) Ănsĕşi condiţiune relativă la coefici-ntul numericu al dividendului poate să nu esiste fără ca să inceteză cuoţientul de a fi intreg.

Esemplu. $5a^2b^3c : 7ab^2 = \frac{5}{7}abc$, este o cuantitate algebrică in'reagă.

un minut, abstracţiune de condiţiunile precedinţi ale divisibilităţei monomilor, vom avè

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \quad (17)$$

Ceia ce ni propunem este a vidè supt ce condiţiune a-ceastă formulă poate devinì aplicabilă or cari ar fi relaţiunile de mărime intre m şi n. Trei ca-uri se pot presintà, după cum va fi

$$1^0 \ m > n,$$
$$2^0 \ m = n,$$
$$3^0 \ m < n$$

In casul ăntăi formula (17) este aplicabilă, căci este sa-satisfăcută atunci condiţiunea cerută pentru ca divisiunea a duoi monomi să deie un cuoţient algebric intreg.

In casul al duoilea m find ecual cu n, esponentul $m-n$ devine zero şi al duoilea membru al formulei se reduce la a^0. Această espresiune nu are nici un inţeles dŭpă definiţiunea dată esponentului, dar dacă voim a o introduce in calcul spre a ne ajunge scopul de generalisare ce ne-am propus asupra formulei (17), atunci va trebuì a admite că această notaţiune represintă *unitatea*, căci este *espresiunea cuoţientului a doué cuantităţi ecuale.* Supt această condiţiune este evident că formula 17) va fi adevĕrată şi pentru $m = n$, căci vom avé

$$a^m : a^n = a^{m-n} = a^0 = 1$$

In casul al treilea n find mai mare decăt m, vom puté pune

$$n = m + p,$$

atunci formula (17) devine

$$a^m : a^{m+p} = a^{m-m-p} = a^{-p}.$$

Referêndu-ne la semnificarea esponenţilor nu putem dà nici o interpretare espresiunei a^{-p}, căci esponentul unei cuantităţi trebuind a arată de căte ori această cuantitate este luată ca factor, nu se poate concepe cum va fi luată cuantitatea *a* de-p ori ca factoru. Dar de voim ca formula $a^m : a^n = a^{m-n}$ să se aplice şi in

casul lui $m<n$, atunci va trebuì a admite că notaţiunea a^{-p} represintă espresiunea cea mai simplă a câtului divisiunei indicate in membrul ăntăiu. Putem scri.

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^{m+p}}$$

$$\text{sau } a^m : a^n = \frac{a^m}{a^m \cdot a^p} = \frac{1}{a^p}$$

vom avé dar prin convenţiune

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p},$$

Nota. Cu ajutorul acestei convenţiuni şi al acelei relative la esponentul zero, formula (17) devenind o formulă generală, regula devisiunei monomilor va da adevarata espresiune a cuoţientului in toate casurile.

Esemplu. $5a^3b^2c : 7a^2b^3c^2d = 5a^3b^2cd^0 : 7a^2b^3c^2d = \frac{5}{7}ab^{-1}c^{-1}d^{-1}$

$$\text{sau} \quad 5a^3b^2c : 7a^2b^3c^2d = \frac{5}{7}ab^{-1}c^{-1}d^{-1} = \frac{5a}{7bcd} .$$

50 ***Divisiunea polinomilor.*** In divisiunea polinomilor distingem două casuri după cum.

1⁰ Devidentul este polinom şi divisorul monom.

2⁰ Dividendul şi divisorul sunt ambii polinomi.

In casul ăntĕiu cuoţientul căutat se va căpătá intr'un mod foarte simplu *impărţind fie-care termin al dividendului prin monomul divisor*; căci espresiunea astfeliu formată va satisface la condiţiunea necesară şi de ajuns de a dá, prin imulţirea sa cu divisorul, un product ecuale cu dividendul.

Esemple: I. Fie dat a impărţì polinomul $+(a+b-c+d)$ prin monomul m; vom avè.

$$[a+b-c+d] : m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m} + \frac{d}{m}.$$

in care espresiunea din al doilea membru este insuşu cuoţientul căutat, căci imulţind'o prin m, avemu:

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}+\frac{d}{m}\right).m=\frac{a}{m}.m+\frac{b}{m}.m-\frac{c}{m}.m+\frac{d}{m}.m$$
$$=a+b-c+d.$$

II. $[15a^3b^2-18a^2b^3+24ab^4]:(-3ab)=-5a^2b+6ab^2-8b^3.$

51. Trecem acum la al doilea cas al divisiunei polinomilor, in care scopul ce ne propunem este: fiind daţi duoi polinomi intregi, dividendul şi divisorul, a găsi un al treilea polinom intreg, cuoţientul, care imulţit prin divisor să ne reproducă pe dividend.

Pentru a găsi in acest cas regula formărei cuoţientului căutat vom raţioná in modul următor.

Valoarea unui polinom nu se schimbă când schimbăm ordinea terminilor sei; dacă dar dividendul şi divisorul propuşi au o literă comună, i vom puté presupune ordinaţi impreună cu cuoţiontul lor, după potenţile descrescĕtoare a le acestei litere. Ânsă după o teoremă espusă in esplicarea immulţirei polinomilor, scim că dacă duoi polinomi şi productul lor sunt ordinaţi iu acelaş mod după potenţile unei litere, terminii estremi ai productului provin fără reducţiune din immulţirea terminilor estremi respectivi ai multiplicandului şi multiplicatorului; prin urmare terminul ăntĕiu al dividendului care nu'i alta decăt productul divisorului prin cuoţient, provine fără nici o reducţiune din imulţirea terminului ăntĕi al divisorului prin ântĕiul al cuotentului. Impărţind dar terminul ăntĕiu al dividendului prin ăntĕiul al divisorului vom obţiné terminul ăntĕiul al cuoţientului; şi fiind că dividendul este suma productelor parţiale ale divisorului prin diferiţii termini ai cuoţientului, vedem că dacă vom scădé din dividend productul immulţirei divisorului prin ăntĕiul termin al cuoţientului, restul ce va resultá va fi suma productelor parţiale ale divisorului prin cei-l-alţi termini ai cuoţientelui. Acest ăntĕiu rest fiind ordinat in acelaş mod ca şi in-

tregul dividend propus, antĕiul sĕu termin va fi ecuale cu productul terminului ăntĕiu al divisorului prin terminul al duoilea al cuoţientului. Impărţind dar ăntĕiul termin al ăntĕiului rest prin terminul ăntĕiu al divisorului, vom obţinè terminul al duoilea al cuoţientului; imulţind prin acest termin intregul divisor şi scăḑĕnd productul din ăntĕiul rest, obţinem un nuou rest căruia ii dăm nume de restul al duoilea. Acest al duoilea rest este ecuale cu suma productelor parţiale ale divisorului prin terminii următori ai cuoţientului. Continuănd a operà intr'acest chip vom ajunge sau la un rest zero, şi atunci divisiunea este *posibilă*, sau la un rest al cărui grad in privinţa literei ordinatrice va fi mai mic decăt gradul terminului ăntĕiu al divisorului in privinţa aceleaşi litere, şi atunci divisiunea propusă este imposibilă, căci dacă am voi a continuá operaţiunea am fi conduşi a scri la cuoţient termini fracţionari.

Resumănd ceia ce precede căpătăm regula practică următoare:

Pentru a formá cuoţientul divisiunei a duoi polinomi este de ajuns a'i ordiná după potenţile crescĕtoare saŭ descrescĕtoare ale aceleiaşi litere, a divide termenul ăntĕiu al dividendului prin ăntĕiul termin al divisorului, cĕia ce va dà terminul ăntĕiu al couţientului. A immulţi acest termin prin întregul divisor şi a scădè productul din dividend; a impărţì terminul ăntĕiu al restului prin ăntăiul al divisoruluì, ceia ce dă terminul al duoilea al cuoţientului; a immulţì acest termin prin intregul divişor şi a scădè productul din dividend. A repeţì asupra restului al duoilea aceieşi operaţiune şi a continuà astfeliu pănă la un rest ultim care va fi zero sau diferit de zero, după cum divisiunea propusă este posibilă sau imposibilă.

52. Esemplul I. Fie propus a impărţì polimonul $45a^5b+54a^4b^2-86a^3b^3-37a^2b^4+59ab^5-35b^6$, prin

$$3a^2+2ab-5b^2$$

Vom avé:

$$\begin{array}{lr|l}
 & 45a^5b+54a^4b^2-86a^3b^3-37a^2b^4+59ab^5-35b^6 & 3a^2+2ab-5b^2 \\
 & -45a^5b-30a^4b^2+75a^3b^3 & \overline{15a^3b+8a^2b^2-9ab^3+7b^4} \\
R_1= & 24a^4b^2-11a^3b^3-37a^2b^4+59ab^5-35b^6 & \\
 & -24a^4b^2-16a^3b^3+40a^2b^4 & \\
R_2= & -27a^3b^3+3a^2b^4+59ab^5-35b^6 & \\
 & 27a^3b^3+18a^2b^4-45ab^5 & \\
R_3= & 21a^2b^4+14ab^5-35b^6 & \\
 & -21a^2b^4-14ab^5+35b^6 & \\
R_4= & 0 &
\end{array}$$

Restul al patrulea insemnat prin R_4 care se cetesce R semnul sau indiciul patru, find ecuale cu zero, divisiunea propusă este posibilă.

Nota. Practica acestei operaţiuni se mai simplifică observănd că terminul ăntĕiu al unui rest asupra căruia s'a operat se anulează prin sustracţiunea din acest rest al productului provenit din immulţirea terminului ăntĕiu al divisorului prin terminul corespundetoriu al cuoţientului, ceia ce ne poate scuti de a mai immulţi terminul ăntĕiu al divisorului prin diferiţii termini ai cuoţientului, mărginindune a insemna prin o trăsură terminii ăntĕi ai resturilor consecutive.

Esemplul II. A impărţí polinomul

$$6a^2x^5-11a^3x^5+17a^4x^3-21a^5x^2+11a^6x-6a^7$$

prin polinomul

$$2ax^2-a^2x+a^3,$$

Vom avé aplicănd simplificarea observată

$$\begin{array}{r|l}
6a^2x^5-11a^3x^4+17a^4x^3-21a^5x^2+11a^6x-6a^7 & 2ax^2-a^2x+a^3 \\
+3a^3x^4-3a^4x^3 & \overline{3ax^3-4a^2x^2+5a^3x-6a^4} \\
-8a^3x^4+14a^4x^3-21a^5x^2+11a^6x-6a^7 & \\
-4a^4x^3+4a^5x^2 & \\
10a^4x^3-17a^5x^2+11a^6x-6a^7 & \\
+5a^5x^2-5a^6x & \\
-12a^5x^2+6a^6x-6a^7 & \\
-6a^6x+6a^7 & \\
0 &
\end{array}$$

53. Când litera ordinatrice a dividendului şi divisorului are coeficienţi polinomi, regula precedinte a divisiunei continuă a fi aplicabilă, efectuarea ănsĕ a operaţiunei devine mai complicaţă in aceia că determinarea diferiţilor termini ai cuoţientului necesită divisiuni parţiale.

Spre a ne formá o idee clară asupra efectuărei divisiunei in asemene cas, fie-ne propusă divisiunea următoare:

$$\left.\begin{array}{r}+a^2\\-b^2\end{array}\right|x^3 \left.\begin{array}{r}+2ab\\-2ac\end{array}\right|x^2 \left.\begin{array}{r}+a^2\\+2b^2\\+c^2\\+2ab\\-2bc\end{array}\right|x \begin{array}{r}+ab\\+b^2\\+ac\\-bc\end{array} \quad\Bigg\|\quad \begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}+a\\+b\end{array}\right|x \begin{array}{r}+b\\-c\end{array}\\\hline \left.\begin{array}{r}+a\\-b\end{array}\right|x^2 \left.\begin{array}{r}+b\\-c\end{array}\right|x \begin{array}{r}+a\\+b\end{array}\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}+ab\\-ac\\+b^2\\-bc\end{array}\right|x^2 \left.\begin{array}{r}+a^2\\+2b^2\\+c^2\\+2ab\\-2bc\end{array}\right|x \begin{array}{r}+ab\\+b^2\\-ac\\-bc\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r}+a^2\\+b^2\\\\+2ab\end{array}\right|x \begin{array}{r}+ab\\+b^2\\-ac\\-bc\end{array}$$

$$0$$

Coeficentul a—b al terminului ăntĕi al cuoţientului este căpătat prin divisiunea parţială.

$$\begin{array}{r|l}a^2-b^2 & a+b\\ -ab & \overline{a-b}\\\hline -ab-b^2 & \\ +b^2 & \\\hline 0 & \end{array}$$

Immulţind divisorul prin terminl ăntĕl $\left.\begin{array}{r}+a\\-b\end{array}\right|x^2$ al cuo-

ţientului şi sustrăgĕnd productul din dividend dobêndim ănteiul rest al căruicel ănteiŭ terminu este

$$\left.\begin{array}{l} +ab \\ -ac \\ -bc \\ +b2 \end{array}\right| x^2;$$

coeficientul b—c al terminilui al duoilea al cuoţientului se capătă atunci prin divisiunea parţială

$$\begin{array}{r|l} ab-ac-bc+b & a+b \\ \diagup \qquad\qquad -b^2 & \overline{b-c.} \\ \hline -ac-bc & \\ \diagup\ +bc & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Terminul al duoilea al cuoţientului devine astfeliu $\left.\begin{array}{l} +b \\ -c \end{array}\right| x.$

Substrăgênd din dividend productul acestui termin prin divisor, ajungem la al duoilea rest al cărui ănteiul termin este

$$\left.\begin{array}{rr} + & a^2 \\ + & 2ab \\ + & b^2 \end{array}\right| x.$$

Coeficientul a+b al terminului al treilea şi cel din urmă al cuoţientului se capătă prin divisiunea parţială

$$\begin{array}{r|l} a^2+2ab+b^2 & a+b \\ \diagup\ -ab \qquad & \overline{a+b} \\ \hline ab+b^2 & \\ \diagup\ -b_2 & \\ \hline 0. & \end{array}$$

Immulţind acest din urmă termin al cuoţientului prin divisor şi scăḑind productul din dividend, găsim un rest zero.

54. ***Despre condițiunile de posibilitate ale divisiunei.*** Divisiunea algebrică a duoi polinomi se ḑice *posîbilă când aplicând regula practică cunoscută ajungem la un rest zero* și *imposibilă când prelungind operațiunea or cât de mult nu ajungem nici-odată la un asemene rest.* Pentru a recunoasce in care din aceste doue casuri se află o divisiune propusă, este de ajuns a observà că *cuoțientul divisiunei a duoi polinomi intregi, trebuind el insuș a fi un polinom intreg, va fi necesariu ca atât terminul ântĕiu al divídendului cât și termini ântĕi ai resturilor succesive, să fie toți divizibili prin ântâiul termin al divisorului căci fie-care din aceşti termini represintă productul terminului ântĕiu al divisorului, prin un termin al cuoțientului.*

Nota. Cuoțientul divisiunei algebrice a duoi polinomi intregi poate avé une-ori termini fracționari fără ca divisiunea să fie imposibilă.

Esemplu. Fie propus a divide polinomul $8x^5—38x^4+23x^3+7x^2+5x—4$ prin $4x^3—20x^2+16x$.

Vom avè

$$\begin{array}{r|l}
8x^5-38x^4+22x^3+7x^2+5x-4 & 4x^3-20x^2+16x \\
\not\ \ +40x^4-32x^3 \qquad\qquad\qquad & 2x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4x} \\
\hline
+2x^4-10x^3+7x^2+5x-4 & \\
\not\ \ +10x^3-8x^2 \qquad\quad & \\
\hline
-x^2+5x-4 \qquad & \\
\not\ \ -5x+4 \qquad & \\
\hline
0 \qquad\quad &
\end{array}$$

Aceasta provine din aceia că terminii divisorului au un factor comun 4x, care introducĕndu-se ca divisor in espresiunea cuoțientului determină termini fracționari. Așa dar spre a putè aplicà condițiunile precedinți ale posibilității unei divisiuni, va trebuì inainte de a incepe operațiunea a esaminà dăcă terminii divisorului nu au un factor comun. In caz de esistență a unui asemene factor va fi de ajuns a'l isolà punĕndul in evidență

şi a opera ca şi cum acest factor nu ar esiste, introducêndu-lu in urmă, cănd divisiunea este posibilă ca divisor in diferiţii termini ai cuoţientului. Procedĕnd in acest mod in esemplul precedent, vom avè

$$\begin{array}{l|l}
8x^5-38x^4+22x^3+7x^2+5x-4 & 4x\ (x^2-5x+4) \\
\underline{+40x^4-32x^3} & \overline{(8x^3+2x^2-1):4x=} \\
\quad 2x^4-10x^3+7x^2+5x-4 & \\
\quad\quad +10x^3-8x^2 & 2x^2+\frac{x}{2}\ \frac{1}{4x} \\
\quad\quad\quad -x^2+5x-4 & \\
\quad\quad\quad\quad -5x+4 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad 0 &
\end{array}$$

55. Cănd dividendul şi divisorul sunt ordinaţi după potenţile crescĕtoare ale unei litere, gradul resturilor succesive merge crescĕnd, astfeliu că divisiunea terminului ăntĕiu al unui rest prin terminul ăntĕiu al divisorului este neincetat posibilă. Pentru a recunoasce in acest cas posibilitatea unei divisiuni, este de ajuns a observà că in virtutea teoremei I din teoria multiplicaţiunei şi a scopului divisiunei algebrice, terminul din urmă al cuoţientului, cănd acesta esistă, este ecuale cu cuoţientul divisiunei terminului din urmă al dividendului prin terminul din urmă al divisorului. Prin urmare pentru ca divisiunea să fie posibilă va trebuì ca terminul calculat astfeliu de-a dreptul să fie identic cu terminul de acelaş grad din cuoţient determinat prin aplicarea regulei divisiunei, şi restul corespundetoriu să fie zero.

Esemplu.
$$\begin{array}{l|l}
2+3x-4x^2+5x^3+6x^4 & 1+2x \\
\quad -4x & \overline{2-x-2x^2+9x^3} \\
\quad\quad -x-4x^2+5x^3+6x^4 & \\
\quad\quad\quad \underline{+2x^2} & \\
\quad\quad\quad -2x^2+5x^3+64^4 & \\
\quad\quad\quad\quad +4x^3 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad 9x^3+6x^4 & \\
\quad\quad\quad\quad\quad \underline{-18x^3} & \\
\quad\quad\quad\quad\quad -12x^4 &
\end{array}$$

Această divisiune este imposibilă căci terminul $9x^3$ determinat prin aplicaţiunea regulei nu este identic cu cuoţientul $3x^3$ al divisiunei terminului din urmă $6x^4$ al dividendului prin terminul din urmă 2x al divisorului.

65. *Nota.* Esaminănd procediul după care se determină cuoţientul divisiunei a duoi polinomi, vedem uşor că restul ultim intr'o divisiune imposibilă este resultatul sustracţiunilor succesive din divideud, al productului divisorului prin diferiţii terminï ai cuoţientului. Insemnănd dar acest rest prin R, dividendul prin D, divisorul prin D' şi cuoţientul prin Q, vom avè relaţiunea

$$R=D-D'.Q,$$

sau
$$D=D'.Q+R$$

sau ăncă
$$\frac{D}{D'}=Q+\frac{R.}{D'} \qquad (18)$$

In acesstă relaţiune cuantitatea Q poartă nume de *cuoţientul intreg* al divisiunei şi espresiunea fracţionară $\frac{R}{D'}$, acela de *partea complimentară* sau *terminul complimentar al cuoţientului.*

Aplicănd această formulă la divisiunea precedentă avem

$$\frac{2+3x-4x^2+5x^3+6x^4}{1+2x}=2-x-2x^2+9x^3+\frac{-12x^4.}{1+2x}$$

57. Cănd dividendul este un polinom intreg ordinat după potenţile decrescĕtoare ale unei litere şi divisorul un binom de gradul ăntĕi, atunci posibilitatea divisiunei se recunoasce uşor cu ajutorul teoremei următoare:

Teoremă. *Restul divisiunei unui polinom intreg ordinat după potenţile descrescĕtoare ale unei litere prin un binom de forma $x-a$ este ecuale cu resultatul substituţiunei lui a in locul lui x în polinom.*

Pentru a demonstrà aceasta, fie $A_0 x^m+A_1x^{m-1}+A_2 x^{m-2}+ . . +A_{m-1}x+A_m$ dividendul propus, şi $x-a$ divisorul. Insemnănd prin Q cuoţientul intreg şi prin R restul

dependite de x la care ajungem efectuănd operaţiunea, vom avé

$$A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=Q.(x-a)+R.$$

Această ecualitate esistĕnd pentru toate valorile lui x, va esista şi pentru valoarea particulară $x=a$; ănsĕ atunci terminul $Q(a-a)=o$, prin urmare vom avé

$$A_0a^m+A_1a^{m-1}+\ldots+A_{m-1}a+A_m=R,$$

ceia ce erá de demonstrat.

O consecinţă imediată a acestei teoreme este că *un polinom intreg* $A_0x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A^{m-1}x+A_m$ *este divisibil prin binomul* **x—a**, *cănd resultatul substituţiunei lui* **a** *in locul lui* **x** *in acest polinom este ecuale cu zero.*

O altă consecinţă este că *un polinom de formă* $A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_{m-1}x+A_m$ *este divisibil prin binomul $x+a$, cănd rèsultatul substituţiunei lui—a in locul luì x in polinom este zero*, căci $x+a=x-(-a)$.

Aplicaţiune. 1° A divide x^m-a^m prin $x-a$. In virtutea teoremei precedinţi putem afirmá, a priori, că divisiunea este posibilă, căci resultatul substituţiunei lui a in locul lui x in dividend este $a^m-a^m=o$; prin urmare restul divisiunei este zero. Efectuănd operaţiunea găsim cuoţientul următoriu:

$$\frac{x^m-a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}+\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}$$

2° A divide x^m+a^m prin $x-a$. Divisiunea este imposibilă căci resultatul substituţiunei lua a in locul lui x in dividend este $a^m+a^m=2a^m$ Făcĕnd divisiunea găsim

$$\frac{x^m+a^m}{x-a}=x^{m-1}+ax^{m-2}+ax^{m-3}+-+a^{m-2}x+a^{m-1}+\frac{2a^m}{x-a}$$

3o. A divide x^m-a^m prin binomul $x+a$. Divisiunea este posibilă sau imposibilă după cum esponentul m este un numĕr pǎreche sau nepǎreche. In adevĕr resultatul substituţiunei lui—a in acest cas în locul lui x in dividend este $(-a)^m-a^m$ care este ecuale cu zero

sau cu $-2a^m$ după cum *m* este păreche sau nepăreche. Punĕnd in casul ăntĕiu $m=2n$ vom avé

$$\frac{x^{2n}-a^{2n}}{x+a}=x^{2n-1}-ax^{2n-2}+a^2x^{2n-3}-\ldots+a^{2n-2}x-a^{2n-1}.$$

Punĕnd in casul al duoilea $m=2n+1$ operaţiunea divisiunei ni va dà:

$$\frac{x^{2n+1}-a^{2n+1}}{x+a}=a^{2n}-ax^{2n-1}+a^2x^{2n-2}-\ldots-a^{2n-1}x+a^{2n}-\frac{2a^{2n+1}}{x+a}.$$

4⁰. $\frac{x^3+y^3}{x+y}=x^2-xy+y^2$

5⁰. $\frac{x}{1+x-x^2}=x-x^2+2x^3-3x^4+\frac{5x^5-3x^6}{1+x-x^2}$

6⁰. $\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1.$

7⁰. $\frac{x^4+4y^4}{x^2+2xy+2y^2}=x^2-2xy+2y^2$

Despre fracţiunile algebrice.

58. Numim *fracţiune algebrică* o espresiune de forma $\frac{A}{B}$ care este indicaţiunea divisiunei a doue cuantităţi algebrice. Dividendul A poartă nume de *numerĕtoriu* şi divisorul B acela de *numitoriu*; ambele cuantităţi A,B se numesc *terminii fracţiunei*. Cănd aceşti termini sunt litere unice precum in fracţiunile $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$ atunci aceste fracţiuni se pot cetì simplu pronunţănd fracţiunea a, b; fracţiunea c, d; fracţiunea e, f; sciind că litera ce se pronunţă in ăntĕiul loc este numĕrătoriul şi cea din urmă numitorul. Mai generală ănse este cetirea a *supra* b; c *supra* d; e *supra* f; căci nu presintă ambiguitate nici intr'un cas.

Terminii fracţiunilor algebrice putĕnd represintà cuantităţi or-care intregi, fracţionare, positive sau negative sunt mai generali decăt ai fracţiunilor aritmetice cari, precum scim, sunt numere intregi; totuş se poate fără dificultate areta că proprietăţile şi regulele de calcul ale fracţiunilor algebrice sunt aceleşi ca şi ale fracţiunilor aritmetice.

59. **Teorema I.** *Valoarea unei fracţiuni algebriçe nu se schimbă îmmulţind sau impărţind ambii sei termini printr'o aceiaşi cuantitate.*

Fie propusă fracţiunea $\frac{a}{b}$ acăreia valoare o represintăm prin q; vom avè

$$\frac{a}{b}=q;\ \text{de unde}\ a=b.\ q.$$

Immulţind ambii membri ai acestei ecualităţi prin o cuantitate n ni va veni

$$an=bn.\ q;$$

de unde $\frac{an}{bn}=q$;

ănsĕ q este fracţiunea $\frac{a}{b}$, prin urmare

$$\frac{an}{bn}=\frac{a}{b},$$ ceia ce era de demonstrat.

De asemene ecualitatea $a=bq$ impărţită prin n, ni dă

$$\frac{a}{n}=\frac{b}{n}.q.$$

Punĕnd $\frac{a}{n}=a'$ $\frac{b}{n}=b'$ vom avè

$$a'=b'.q$$

sau $$\frac{a'}{b'}=q$$

sau $$\frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}=q=\frac{a}{b}.$$

Aşa dar valoarea unei fracţinni algebrice remăne neschimbată când immulţim sau impărţim ambii sei termini printr'un acelaş numĕr.

60. ***Simplificarea fracţiunilor***. O primă consecinţă a teoremei precedenţi este că putem suprime factorii comuni numĕrătorului şi numitorului unei fracţiuni fără a'i modifica valoarea; in aceasta consistă şi simplificarea unei fracţiuni or-care.

Esemple. 1⁰. A simplifica fracţiunea $\frac{15a^3b^3c^3}{3a^2bc^2d}.$

Observăm că numĕrătorul şi numitorul acestei fracţiuni au ca factor comun monomul $3a^2bc^2$. Suprimĕnd acest factor comun, adicĕ impărţind prin el ambii termini ai fracţiunei propuse, vom avè

$$\frac{15a^3b^2c^3}{3a^2bc^2d}=\frac{5abc}{d};$$

fracţiunea astfeliu simplificată se ḑice *redusă la cea mai simplă a sa espresiune.*

2⁰. Fie asemene propus a simplificà fracţiunea

$$\frac{4a^2b(a^2+2ab+b^2)}{12ab^2(a^2-b^2)}.$$

Vom avé in virtutea formulelor (11) şi (13)

$$\frac{4a^2b(a^2+2ab+b^2)}{12ab^2(a^2-b^2)}=\frac{4a^2b(a+b)^2}{12ab^2(a+b)(a-b)}$$ in care vedem că

factorul comun la numerătoriu şi la numitoriu este 4ab (a+b). Suprimândul ni va venì

$$\frac{4a^2b(a^2+2ab+b^2)}{12ab^2(a^2-b^2)}=\frac{4a^2b(a+b)^2}{12ab^2(a+b)(a-b)}=\frac{a(a+b)}{3b(a-b)}$$

61. *Reducerea fracţiunilor la acelaş numitor.* Teorema I ne mai poate servì a reduce un numĕr or-care de fracţiuni la un numitoriu comun.

Fie spre esemplu, propus a reduce la un numitoriu comun fracţiunile $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}$. *Immulţind ambii termini ai fie-cărei fracţiuni prin productul numitorilor celor-lalte,* vom avé

$$\frac{adfh}{bdfh}, \frac{cbfh}{bdfh}, \frac{bdch}{bdfh}, \frac{bdfg}{bdfh}$$

cari sunt respectiv ecuali cu fracţiunile propuse.

Espresiunea numitorului comun se simplifică când numitorii fracţiunilor propuse au factori comuni. Atunci numitorul comun este cel mai simplu multiplu comun al numitorilor diferitelor fracţiuni date, adicĕ o espresiune divisibilă prin fie care din aceşti numitori.

Fie, spre esemplu, propus a reduce la un numitor comun fracţiunile următoare:

$$\frac{m}{25a^3b^2c}, \frac{n}{8c^2d}, \frac{p}{16a^4b^3d^2}$$

Cel mai simplu multiplu comun al numitorilor find o espresiune divisibilă prin fie-care din ei, se va formà luănd productul factorilor primi ai acestor numitori, fie-care factor avĕnd gradul cel mai inalt. Pentru aceasta vom scrie

$$25a^3b^2c=5^2.a^3b^2c$$
$$8c^2d=2^3c^2d$$
$$15a^4b^3d^2=3.5a^4b^3d^2$$

de unde cel mai simplu multiplu comun al numitorilor fracţiunilor propuse va fi $2^3.\ 3.5^2.a^4b.^3c.^2d^2$. Spre a reduce fracţiunile precedinţi a avé ca numitor comun această cuantitate, observămu că este de ajuns a immulţi terminii fie-căreia fracţiuni prin productul factorilor primi ai numitorilor celor-lalte, cari nu sunt conţinuţi in acel al fracţiunei respective. De unde regula *un numĕr or-care de fracţinni se reduce la acelaş numitor, impărţind mai simplul multiplu comun al numitorilor fracţiunilor date prin numitorul fie-căreia, immulţind resultatul prin numeratorul fracţiunei respective şi dănd fie-cărui product ca numiteriu, espresiunea celui mai simplu multiplu comun.*

Vom avé astfeliu

$$2.^33.5.^2a.^4b.c.^2d^2 : 5.^2a.^3b.^2c=2.^33abcd^2.$$
$$: 2^3c^2d. =3.5^2a^4b^3d$$
$$: 3.5a^4b^3d^2=2.^35c^2;$$

de uude fracţiunile propuse reduse la acelaş numitoriu vor fi

$$\frac{24abcd.^2m}{600a^8b^4c^2d^2},\ \frac{75a^4b^3d.n}{600a^4b^3c^2d^3},\ \frac{40c.^2p}{600a^4b^3c^2d^2}$$

62. ***Teorema II.*** *Suma mai multor fracţiuni cari au acelaş nnmitor, este ecuale cu suma numitorilor impărţită priu mumitorul comun.*

Fie propus a sumà frácţiunile $\frac{a}{m}, \frac{b}{m}, \frac{c}{m}$ care au acelaş numitoriu m.

Ḑicu că vomu avè:

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c.}{m}$$

căci efectuăndu divisiunea arĕtată in al duoilea membru recăpătămu fracţiunile din membrul ăntĕiu.

63. *Teorema III. Doue fracţiuni algebrice cari au acelaşu numitoriu se substrag dacă se substrage numĕrătorul fracţiunei a dona din acela al fracţiuneĭ ăntĕiu şi se dă diferinţei de numitoriu pe numitorul comun.*

Este in adevĕr invederat că vom avè

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m}$$

căci efectuarea divisiunei arătate in al duoilea membru reproduce fracţiunile din ăntĕiul membru.

64. *Nota I.* Cănd fracţiunile propuse a se aduna sau a se subtrage nu au acelaş numitoriu, atuncĭ cea ăntĕiu operaţiune de făcut va fi reducerea la un numitoriu comun, după care va urmà aplicarea regulelor precedinţi.

Esemplu. A face suma algebrică a fracţiunilor

$$\frac{+3ab}{4g^2h},\ \frac{-2c^2}{3h^2}.\ \frac{+5ac}{6g^2f^2}$$

Vom avè

$$\frac{3ab}{4g^2h}-\frac{2c^2}{3h^2f}+\frac{5ac}{6g^2f^2}=\frac{9abhf_2}{12g^2h^2f^2}-\frac{8cg^2f}{12g^2h^2f^2}+\frac{10ach^2}{12g^2h^2f^2}$$

$$=\frac{9abhf_2-\ 8cg^2f+10ach^2}{12g^2h^2f^2}$$

Nota II. De asemenea cănd avemu a aduna o fracţiune către o cuantitate întreagă sau cănd avemu a scădè o fracţiune dintr-o cuantitate întreagă, atunci reducemu

această cuantitate la forma fracţionară immulţind-o şi impărţind-o prin numitorul fracţiunei propuse.

Esemple: 1⁰ $a+\frac{c}{3d}=\frac{3ad}{3d}+\frac{c}{3d}=\frac{3ad+c}{3d}$;

2⁰ $m-\frac{p}{2q}=\frac{2mq}{2q}-\frac{p}{2q}=\frac{2mq-p}{2q}$

65. ***Teorema IV.*** *Productul a duoe fracţiuni se formează immulţind numerătorii* şi *impărţind resultatul prin productul numitorilor.*

Fie propus a immulţi fracţiunea $\frac{a}{b}$ prin fracţiunea $\frac{c}{d}$

Representând valoarea fracţiunei ântĕia prin q şi acea a fracţiunei adoua prin q′, vom avè

$$\frac{a}{b}=q, \quad \frac{c}{a}=q';$$

de unde $a=bq$ şi $c=dq'$. Immulţind membru către membru
aceste doue ecualităţi, ni va veni

$$ac=bdqq'.$$

De unde impărţind ambii membri prin bd, vom obţinè

$$\frac{ac}{bd}=q.q',$$

sau $$\frac{ac}{bd}=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$$

ceia ce era de demonstrat.

Regula cuprinsă in teorema precedinte se poate uşor estinde la casul immulţirei unui numĕr or-care de fracţiuni. Avemu astfeliu :
In adevĕr formarea productului a trei fracţiuni, se reduce laformarea productuluial immulţirei a doue fracţiuni, substituind celor ântĕi duoe, fracţiunea care representă productul lor efectuat.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}\cdot\frac{a''}{b''}=\frac{aa'}{bb'}\cdot\frac{a''}{b''}=\frac{aa'a''}{bb'b''},$$

ceea ce ni arată că *productul immulţirei a trei fracţiuni se formează immulţind numeratorii intre ei şi împărţind resultatul prin productul numitorilor*. In acelaş mod productul al patru fracţiuni se va reduce la acela al immulţirei a trei fracţiuni; productul immulţirei a cinci fracţiuni la acel al immulţirei a patru şi ăşa indefinit. De aice regula generală următoare: *Productul immulţirei unui numĕr or-care de fracţiuni se formează immulţind numerătorii intre ei şi impărţind resultatul prin productul numitorilor*.

Vom avè

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{a'}{b'}\cdot\frac{a''}{b''}\cdot\frac{a'''}{b'''}\cdots\frac{a^{(m)}}{b^{(m)}}=\frac{a.a.'a.''..a^{(m)}}{b.b'.b''...b^{(m)}}$$

Din această regulă a immulţirei fracţiunilor algebrice resultă o altă relativă la redicarea lor la potenţă. In adevĕr după definiţiunea acestei operaţiuni avem:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}\ \text{sau}=\frac{a^n}{b^m}\ \text{in}$$

virtutea regulei precedinţi.

Aşa dar spre *a redicà o fracţiune la o potenţă or-care, trebue a redicà ambii sei termini la această potenţă*.

66. **Teorema V.** *Cuoţientul al duoe fracţiuni este ecuale cu fracţiunea dividend immulţită prin inversa fracţiunei divisor*.

Fie propus a impărţi fracţiunea $\frac{a}{b}$ prin fracţiunea $\frac{c}{d}$

Vom avè represintănd valorile acestor fracţiuni prin q şi q'

$$\frac{a}{b}=q,\quad \frac{c}{d}=q';$$

de unde $\quad a=bq$ şi $c=dq'$.

Impărţind aceste duoĕ ecualităţi membru către membru ni va venì:

$$\frac{a}{c}=\frac{bq}{dq'}.$$

Immulţind acum de o parte şi de alta prin fracţiunea $\frac{d}{b}$ căpătăm

$$\frac{ad}{cb}=\frac{bqd}{dq'b}=\frac{q}{q'}$$

sau $\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$, ceea ce erà de arătat.

67. ***Teorema VI.*** *Intr'un şir de fracţiuni ecuali suma numerătorilor impărţită prin suma numitorilor este o fracţiune ecuale cu fie-care din ele.*

Fie propuse fracţiunile ecuali

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\frac{a'''}{b'''}=\ldots\ldots,$$

Vom ave insemnănd valoarea lor comună prin q

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\frac{a'''}{b'''}=q.$$

De unde
$$\begin{aligned} a&=bq\\ a'&=b'q\\ a''&=b''q\\ a'''&=b'''q \end{aligned}$$

sau $a+a'+a''+\ldots.=(b+b'+b''+\ldots).q$

Impărţind ambii membri prin espresiunea parintesei vom avè:

$$\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''\ldots}=q=\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b'}\ldots;$$

ceea ce erà de demonstrat:

68. *Exerciții.* A aretà că din teorema precedinte resultă relațiunile următoare:

$$1^0.\quad \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots=\frac{ak+a'k'+a''k''+\ldots}{bk+b'k'+b''k''+\ldots}$$

$$2^0.\quad \frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}=\frac{a''}{b''}=\ldots=\frac{\sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}}{\sqrt{b^2+b'^2+b''^2+\ldots}}$$

69. *Aplicațiune.* Teorema VI pre care o putem numì *teorema fracțiunilor ecuali* șerve a facilità resolvirea cuestiunilor in cari necunoscutele sunt supuse la condițiunea de a fi proporționale cu nisce cuantitați date și de a avé o sumă constantă.

Problema I. *Un părinte lasă, prin testement la trei fii ai sei, suma de 2985 galbeni spre a o impărți intre ei proporțional cu vărsta lor. Vêrsta celui mai mare este către vêrsta celui mijlociu ca 5 la 3; vêrsta celui mijlociu este către vêrsta celui mai mic ca 3 la 2. Care va fi partea fie-căruia?*

Insemnănd prin x, y, z părțile necunoscute, este evident că vom avé in virtutea enunciului problemei:

$$x + x + z = 2985 \text{ și } \frac{x}{y}=\frac{5}{3},\ \frac{y}{z}=\frac{3}{2}.$$

De unde $\frac{x}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}=\frac{x+y+z}{10}$ sau

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}=\frac{2985}{10}=298{,}5.$$

Prin urmare
$$x = 298{,}5.5 = 1492{,}5$$
$$y = 298{,}5.3 = 895{,}5$$
$$z = 298{,}5.2 = 597{,}0$$

Verificare . . 2985,0

Problema II. Intre trei persoane A,B,C s'a impărțit o intindere de 864 fălci pămĕnt. Partea lui A stă către partea lui B ca 5 la 11; acea a lui C este

ecuale cu suma celorlalte duoĕ: cât a primit fie-care?

Observăm că insemnănd prin x partea lui A, prin y partea lui B, acea a lui C va fi x+y. Vomu avè

$$\frac{x}{5}=\frac{y}{11}=\frac{x+y}{16}=\frac{2x+2y}{32}$$

$$\text{sau } \frac{x}{5}=\frac{y}{11}=\frac{x+y}{16}=\frac{864}{32}=27$$

De unde

$$x=27.5.=135$$
$$y=27.11=297$$
$$x+y=27.16=432$$

Verificare

$$864.$$

Problema III. *Patru creditori A, B, C, D au a'și impărți suma de 21000 lei luată de la un datornic comun al lor. Creanța lui A stă cătră creanța lui B precum 2 la 3; creanța lui B cetră cea a lui C ca 4 la 5 si acea a lui C cătră cea a lui D ca 6 la 7. Cât va primi fie-care, admițênd că impărțirea se face proporțională cu creanțile?*

Insemnănd prin x, y, z, u părțile cuvenite respectiv fiecărui creditoriu, vom avé relațiunile:

$$x+y+z+u=21000$$

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{3};\ \frac{y}{z}=\frac{4}{5},\frac{z}{u}=\frac{6}{7}$$

$$\text{sau } \frac{x}{2}=\frac{y}{3}, y=\frac{4.}{5}z;\ z=\frac{6}{7}u;$$

$$\text{sau } \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{4z}{15}$$

sau ăncă impărțind prin 4 câte trele fracțiunile ni vine

$$\frac{x}{8}=\frac{y}{12}=\frac{z}{15},\ \text{ănsă } z=\frac{6}{7}u \ \text{ sau } \frac{z}{15}=\frac{2.u}{35};$$

de unde $$\frac{x}{8}=\frac{y}{12}=\frac{z}{15}=\frac{2u}{35}$$

sau $$\frac{x}{16}=\frac{y}{24}=\frac{z}{30}=\frac{u}{35}=\frac{x+y+z+u}{105}$$

sau $$\frac{x}{16}=\frac{y}{24}=\frac{z}{30}=\frac{u}{35}=\frac{21000}{105}=200$$

Prin urmare $$x=200.16=3200$$
$$y=200.24=4800$$
$$z=200.30=6000$$
$$u=200.35=7000$$

Verificare $$x+y+z+u=21000.$$

70. Din teorema fracţiunilor ecuali se poate deduce uşor, demonstraţiunea teoremelor următoare relative la proporţiunile geometrice ·

Teorema I. *In or ce proporţiune geometrică suma celor ăntĕi doi termini se raportă la ăntĕiul sau la al douilea, precum suma terminilor din urmă se raportă la al treilea sau la al pıtrulea.*

Teorema II. *In or ce proporţiune geometrică suma celor ăntĕi duoi termini se reportă la diferinţa lor precum suma terminılor dın urmă se repoartă la diferinţa acestora.*

Fie propusă proporţiunea

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

Pentru a demonstrà ăntĕia teoremă observăm că propositiunea precedentă se poate scrì

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

care in virtutea teoremei fracţiunilor ecuali ni dă:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{a+b}{a'+b'}$$

de unde proporţiunile $\frac{a+b}{a'+b'}=\frac{a}{a'}$

$$\frac{a+b}{a'+b'}=\frac{b}{b'}.$$

Din ăntĕia deducem $\frac{a+b}{a}=\frac{a'+b'}{a}$;

a doua ni dă $\frac{a+b}{b}=\frac{a'+b'}{b'}$ ceia ce demonstră teorema I.

Pentru a demonstrà a doua teoremă observăm că proporţiunea

$$\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'}$$

Se mai poate scrì $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ sau $\frac{a}{a'}=\frac{-b}{-b'}$.

Aplicănd teorema fracţiunilor ecuali căpătăm

$$\frac{a-b}{a'-b'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{a+b}{a'+b'},$$

de unde $\frac{a-b}{a'-b'}=\frac{a+b}{a'+b'}$

Sau $\frac{a-b}{a+b}=\frac{a-b'}{a'+b'}$

Sau ăncă $\frac{a+b}{a-b}=\frac{a'+b'}{a'-b'}$, ceia ce era de demonstrat.

Aceste proprietăţi a le proporţiunilor geometrice au o frecuentă aplicaţiune in calcul.

Calculul radicalilor monomi.

71. Se dă nume de radical atât semnului $\sqrt[m]{}$ cât şi numĕrului care represintă resultatul operaţiunei indicate prin acest semn, a se efectuà asupra unei cuantităţi or-care. Aşa numĕrul pre care ni-l represintă notaţiunea $\sqrt[n]{a}$ care se cetesce a n[a] rădăcină din a, este un radical. I se dă in special numele de radical monom fiindcă espresiunea de subt semnul $\sqrt{}$ este un monom. Când factorii cari intră in scriere a monomului de subt radical au esponenţi, atunci acesteia se pot numì, pentru scurtarea vorbirei, *esponenţii radicalului*. Numerul *n* poartă nume de *indiciul* seu.

Operaţiunea estragerei rădăcinei a n[a] dintr'o cuantitate $p\alpha^m$ *are de scop a găsi o cuantitate a căreia a n[a] potenţă să fie ecuale cu* $p\alpha^m$. Regula practică pentru determinarea acestei rădăcini se deduce uşor din ânsăşi definiţiunea precedentă. In adevĕr cuantitatea căutată trebuind a fi astfeliu ca potenţa sa a n[a] să fie ecuale cu $p\alpha^m$, şi potenţa a n[a] a unui monom formându-se prin redicarea coeficientului seu numeric la a n[a] potenţă şi immulţirea esponenţilor literilor monomului prin gradul *n* al potenţei, vedem că *rădăcina căutată se va forma estrăgând rădăcina a n[a] din coeficient şi impărţind prin* **n** *esponenţii literilor.*

Spre a putè dar efectua estragerea rădăcinei a n[a] dintr'un monom, coeficientul seu numeric va trebuì a fi o potenţă a n[a] esactă şi esponenţii literilor divisibili prin *n*. Vom avè astfeliu,

$$\sqrt[4]{16a^4b^8c^{12}}=2ab^2c^3,$$

$$\sqrt[n]{5^na^{3n}b^nc^2n}=5a^3bc^2.$$

72. *Nota*. Când condițiunile precedente nu sunt satisfăcute, cu alte cuvinte când cuantitatea de subt radical nu este o potență perfectă corespundĕtoare la indiciul radicalului, atunci operațiunea estragerei de rădăcină remâne indicată numai, fără a se putè efectua in mod esact. In acest cas se află $\sqrt[n]{A}$, când A nu este o potență a n^a perfectă a nici unui numĕr. Espresiunea $\sqrt[n]{A}$ se numesce atunci ***numer incomensurabil*** și se demonstră că represintă *limita* * unui șir de numere ale căror a n^a potență se apropie in definit de A. Aplicarea regulei mai sus formulate, pentru estragerea de rădăcină dintr'un monom, ne duce in asemene casuri la esponenți fracționari. Avem.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}},$$
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \text{ m fiind primu cu n.}$$

După semnificarea ce se atribuie esponenților, cuantitățile $a^{\frac{1}{n}}$, $a^{\frac{m}{n}}$ nu presintă nici un ințeles; totuș este evident că se pot, fără nici o contradicțiune, introduce in calculul cu condițiune de a le considera ca represintând radicalii din cari provinu. Astfeliu vom conveni a considera ca ecuivalente espresiunile $a^{\frac{3}{2}}$ și $\sqrt[3]{a^2}$; $a^{\frac{1}{2}}$ și $\sqrt[2]{a}$.

In alte cuvinte o ***cuantitate cu esponent fracționariu orcare ni va represintà un radical al cărui indiciu va fi numitorul*** și ***al cărui esponent va fi numerătorul.*** Vom avé astfeliu

$$a^{\frac{p}{r}} = \sqrt[r]{a^p}$$

*) *Limită* a unei cuantități variabile, se numesce o cuantitate ficsă de care cuantitatea variabilă se apropie indefinit fără a o pute ajinge. Astfel aria cercului este *limita* ariei unui poligon inscris al cărui număr de laturi cresce indefinit.

73. *Despre transformarea radicalilor.* Cu ajutorul convențiunei precedente regula estragerei de redăcina dintr'un monom devine aplicabilă in toate casurile, in ințelesul că sau ni dă o espresiune rațională, sau ne duce la o simplificare a radicalului când aceasta este cu putință.

Esemple: 1. $\sqrt[3]{27a^6b^3}=3a^2b$

2. $\sqrt[5]{32a^8}=32^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{8}{5}}=2^{\frac{5}{5}}.a.a^{\frac{3}{5}}$

$=2a\sqrt[5]{a^3}.$

3. $\sqrt[6]{8a^3}=\sqrt[6]{(2a)^3}=(2a)^{\frac{3}{6}}=(2a)^{\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{2a}.$

74. O consecință imediată a acestei regule, este propositiunea că *valoarea unui radical nu se schimbă dacă immulțim sau impățrim indiciul și esponenții sei printr'acelașu numĕru.*

In adevĕr avem

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[mp]{a^{mp}} \quad (1)$$

căci aplicănd, fie căruia din acești radicali, regula estragerei de rădăcină găsim:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=a^{\frac{mp}{np}}=a^{\frac{m}{n}},$$ ceea ce demonstră ecualitatea (1).

75. *Duoi sau mai mulți radicali cu indicii diferiți se pot reduce la un indiciu comun dacă immulțim indiciul și esponentul fie-căruia prin productul indiciilor celor lalți.*

Fie propuşi radicalii $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[r]{c}$.

Este evident in virtutea propoziţiunei precedente c'aceşti radicali vor fi respectiv ecuivalenţi cu radicalii următori:

$$\sqrt[mnr]{a^{nr}},\ \sqrt[mnr]{b^{mr}},\ \sqrt[mnr]{c^{mn}}$$

căpătaţi immulţind esponentul şi indiciul fie-căruia din radicalii propuşi prin productul indicilor celor-lalţi.

Nota. Cănd indicii radicalilor propuşi au factori comuni intre ei, atunci in loc de productul tuturor indicilor putem a le da ca indiciu comun mai micul lor multiplu. Pentru aceasta va fi de ajuns a impărţì mai micul multiplu al indiciilor, prin indiciul fie-cărui radical şi a immulţì esponentul prin acest cuoţient. Esemplu. Fie propus a reduce la un indiciu comun radicali $\sqrt[3]{a^2}, \sqrt[5]{b^3}, \sqrt[10]{c^4}$. Formăm mai micul multiplu al indicilor 3, 5, 10 care este 30. Impărţind succesiv acest din urmă numer prin numerile 3, 5, 10 şi cuoţientele immulţindu-le prin esponenţi conrespondĕtori, vom avè:

$$\sqrt[30]{a^{20}}, \sqrt[30]{b^{18}}, \sqrt[30]{c^{12}}$$ cari sunt respectivi ecuali cu radicalii propuşi; căci fie-care este dedus din corespondentul seu immulţindu-i indiciul şi esponentul prin acelaş numĕr.

76. *Un factor care immulţesce un radical se poate trece sub radical dacă se ridică la potenţa corespundetoare indiciului.*

*F*ie radicalul $a\sqrt[m]{b}$. Dicu că se poate scrì

$$\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b};$$

căci, aplicănd membrului al duoilea al acestei ecualităţi regula estragerei de rădăcină, avem

$$\sqrt[m]{a^m b}=a^{\frac{m}{m}}\, b^{\frac{1}{m}}=a\sqrt[m]{b},$$ după semnificarea dată cuantităţilor cu esponenţi fracţionari.

Când monomii a şi b sunt respectiv de forma $p\alpha^n$, $q\beta^r$. Atunci vom scrì

$$p\alpha^n\sqrt[m]{q\beta^r}=\sqrt[m]{(p\alpha^n)^m.(q\beta^r)}$$

Aplicând membrului al douilea regula estragerei de rădăcină ni va vení:

$$\sqrt[m]{(p\alpha^n)^m.(q\beta^r)}=(p\alpha^n)^{\frac{m}{m}}.(p\beta^r)^{\frac{1}{m}}=p\alpha^n\sqrt[m]{q\beta^r},$$

ceia ce era de aratat.

Vice versa. ***Când esponentul unui factor de subt radical este divisibil prin indiciu, factorul se poate scoate afară de radical, dacă impărţim acest esponent prin indiciul radicalului.***

Astfeliu vom avé

$$\sqrt[5]{a^{15}b^2}=a^3\sqrt[5]{b^2};$$

Căci in virtutea teoremei precedente putem scrı

$$a^3\sqrt[5]{b^2}=\sqrt[5]{a^{15}b^2}.$$

77. *Nota.* In stabilirea regulelor relative la calculul radicalilor monomi considerăm valorile absolute ale cuantităţilor de subt radical, astfeliu că espresiunea generală

$\sqrt[n]{A}$ represintă o singură valoare, căreia i se dă nume de ***valoare aritimetică a radicalului*** sau ***determinaţiunea sa aritimetică.***

78. Duoi radicali se ḑic *simili* sau *asemene* când au

acelaş indiciu şi aceeaşi cuantitate subt radical, coeficienţii lor putĕnd fi or-cari. Astfeliu $+5a\sqrt[3]{a^2b}$, $-3c\sqrt[3]{a^2b}$, $+4d\sqrt[3]{a^2b}$ sunt radicali simili.

79. ***Adiţiunea şi subtracţiunea radicalilor.*** Radicalii se adun şi se subtragu după regula cuantităţilor raţionale. Când resultatul adiţiunei sau al sustracţiunei lor cuprinde radicali simili, atunci acesteia se reduc la unul singur, făcĕnd suma algebrică a coeficienţilor sei şi immulţind resultatul prin radicalul comun.

Esemple: I. Fie a se adunà radicalii $+5a^5\sqrt[3]{a^5b}$, $+5c\sqrt{a^2d}$, $-4a^5\sqrt[3]{a^5b}$, $+3fc\sqrt{a^2d}$.

Vom avé: $(+5a^5\sqrt[3]{a^5b})+(+5c\sqrt[3]{a^2d})+(-4a^5\sqrt{a^5b})+$

$$(+3cf\sqrt{a^2d})=(5a^5-4a^5)\sqrt[3]{a^5b}+(5c+3cf)\sqrt{a^2d}.$$

II. A subtrage $+5a\sqrt{b^2c}-3b\sqrt[3]{c^2d}$ din $+10a\sqrt[3]{c^2d}-4b\sqrt{b^2c}$. Vom avé:

$$10a\sqrt[3]{c^2d}-4b\sqrt{b^2c}-(+5a\sqrt{b^2c}-3b\sqrt[3]{c^2d})$$

$$=10a\sqrt[3]{c^2d}-4b\sqrt{b^2c}-5a\sqrt{b^2c}+3b\sqrt[3]{c^2d}$$

$$=(10a+3b)\sqrt[3]{c^2d}-(4b+5a)\sqrt{b^2c}.$$

80. ***Multiplicaţiunea radicalilor.*** *Duoi radicali cari au acelaş indiciu se immulţesc dacă se immulţesc cuantităţile de sub radical şi productul lor se scrie sub radicalul comun.*

Fie propus a immulţì $\sqrt[m]{a}$ prin $\sqrt[m]{b}$. Ḑic că vom avè :

$$\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}.$$

Pentru a demonstra această formulă, este de ajuns a arătà că rădicănd ambii sei membri la a m^a potenţă găsim resultate ecuali. Avem in adevĕr

$$\left(\sqrt[m]{a}.\sqrt[m]{b}\right)^m=\left(\sqrt[m]{a}\right)^m.\left(\sqrt[m]{b}\right)^m=a.b;$$

şi asemene $\left(\sqrt[m]{ab}\right)^m=ab$ ceia ce era de demonstrat.

81. Această demonstraţiune se poate aplica fără nici o schimbare la un număr or-care de radicali.

Fie spre esemplu, propus a forma productul radicalilor

$\sqrt[n]{a}, \sqrt[n]{b}, \sqrt[n]{c}, \sqrt[n]{d}.$ Ḑic că vom avé:

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.\sqrt[n]{d}=\sqrt[n]{a.b.c.d};$$

căci rădicănd ambii membri la a n^a potenţă avem

$$\left(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}.\sqrt[n]{d}\right)^n=\left(\sqrt[n]{a}\right)^n.\left(\sqrt[n]{b}\right)^n.$$

$$\left(\sqrt[n]{c}\right)^n.\left(\sqrt[n]{d}\right)^n=abcd.$$

Si $\left(\sqrt[n]{a.b.c.d}\right)^n=a.b.c.d.$

Putem dar formula regula generală următoare: *Productul al mai multor radicali cu acelaş indiciu se formează dacă se immulţesc cuantităţile de subt radical şi productul se scrie subt radicalul comun.*

82. Regula precedinte ne dă mijlocul de a forma potenţa unui radical monom or-care. Fie in adevĕr propus a redica monomul $\sqrt[n]{pa^3}$ la a m^a potenţă. Vom avé basĕndu-ne pe definiţiunea potenţei şi regula immulţirei radicalilor.

$$\left(\sqrt[n]{pa^3}\right)^m = \sqrt[n]{pa^3}.\sqrt[n]{pa^3}.\sqrt[n]{pa^3}....\sqrt[n]{pa^3}$$

$$= \sqrt[n]{pa^3.pa^3.pa^3...pa^3} = \sqrt[n]{p^m.a^{3m}}.$$

De unde vedem că *spre a redicà un radical la o potenţă este de ajuns a radicá cuantitatea de subt radical la acea potenţă.*

83. *Nota.* Cănd radicalii propuşi a se immulţì nu au acelaş indiciu; atunci spre a efectuà productul lor, este necesar a'i reduce mai ăntĕiu la un indiciu comun şi a aplica apoi regula immulţirei lor. Vom avé astfeliu:

$$\sqrt[m]{pa^3b}.\sqrt[n]{qa^2c} = \sqrt[mn]{p^n a^{3n} b^n}.\sqrt[mn]{q^m a^{2m} c^m}$$

$$= \sqrt[mn]{p^n q^m a^{3n+2m} . b^n . c^m}.$$

84. ***Divisiuuea radicalilor.*** *Duoi radicali sĕ impart când au acelaş indiciu, dacă se impart cuantitățile de subt radical și cuoțientul lor se scrie subt semnul comun.*

Vom avè $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; căci redicând ambii membri

ai acestei ecualități la potența a n', căpătăm resultate ecuale, Avem in adevĕr

$$\left\{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right\}^{n}=\frac{(\sqrt[n]{a})^{n}}{(\sqrt[n]{b})^{n}}=\frac{a}{b} \text{ şi } \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^{n}=\frac{a}{b};$$

ceia ce erà de demonstrat.

Când radicalii propuşi a se impărțì au indicii diferiți, atunci se reduc mai ântĕiu la un indiciu comun şi se aplică apoi regula precedentĕ a divisiunei.

Esemplu. Fie a se impărțì radicalul $\sqrt[n]{a^3b}$ prin $\sqrt[p]{c^2d}$. Vom avè

$$\frac{\sqrt[m]{a^3b}}{\sqrt[p]{c^2d}}=\frac{\sqrt[mp]{a^{3p}b^{p}}}{\sqrt[pm]{c^{2m}d^{m}}}=\sqrt[md]{\frac{a^{3p}b^{p}}{c^{2m}d^{m}}}.$$

85. ***Estragerea de radacina dintr'un radical.*** *Spre a estrage rădăcina dintr'un radical este de ajuns a immulțì indiciul radicalului prin indiciul rădăcinei*

Fie propus a estrage rădăcina a m^a din $\sqrt[r]{a^p}$. Dic că vom avè:

$$\sqrt[m]{\sqrt[r]{a^p}}=\sqrt[mr]{a^p}$$

In adevĕr dacă redicăm ambii membri ai ecualităţei la potenţa mr, avemu

$$\left\{\sqrt[m]{\sqrt[r]{a^p}}\right\}^{mr}=\left[\left\{\sqrt[m]{\sqrt[r]{a^p}}\right\}^m\right]^r$$

$$=\left(\sqrt[r]{a^p}\right)^r=a^p;$$

$$\text{şi}\ \left(\sqrt[mr]{a^p}\right)^{mr}=a^p,$$

ceea ce demonstră regula enunţată.

Esercitii. A face să dispară radicalii din numitorii fracţiunilor. $\frac{a}{\sqrt{b}}, \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}, \frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ Avem

1°. $$\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{b}.\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

2°. $$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

3°. $\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}.$
$=\frac{m(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$

4o. A simplifica fracţiunea $\frac{9a^2-16b^2}{15a^2b-20ab^2}$.

Putem scri:

$$\frac{9a^2-16b^2}{15a^2b-20ab^2}=\frac{(3a)^2-(4b)^2}{5ab(3a-4b)}=\frac{(3a+4b)(3a-4b)}{5ab(3a-4b)}$$
$$=\frac{3a+4b}{5ab}$$

5o. Cum se modifică valoarea unei fracţiuni când se adaoge aceaşi cuantitate la ambii sei termini.

Fie $\frac{a}{b}$ fracţiunea propusă. Adăugind la ambii sei termini unu numer *m*, vom avé $\frac{a+m}{b+m}$ a căreia valoare va fi $><\frac{a}{b}$ sau $=\frac{a}{b}$, după cum diferinţa $\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}$ va fi $><$ sau $=o$*.

Efectuând sustracţiunea, avem

$$\frac{a+m}{b+m}-\frac{a}{b}=\frac{b(a+m)}{b(b+m)}-\frac{a(b+m)}{b(b+m)}=\frac{(b-a)m}{b(b+m)}$$
$=\frac{(b-a)m}{b(b+m)}$ in care vedem că totul depinde de la raportul de mărime dintre *a* şi *b*.—

---

*) Se consideră ca mai mică decât zero or-ce cuantitate negativă, căci după regula substracţiunei algebrice avem

$0-(-5)=+5$
$0-(-a)=+a.$

6°. Pe o linie indefinită XX' se dă un punt fics O şi puntele A,A' situate la distanţe cunoscute OA=a OA'=a'. Se dau asemene lungimile perpendicularelor AB=b, A'B'=b' redicate de o parte şi de alta a dreptei XX'. Linia care unesce estremităţile B, B' a le acestor perpendiculare intălnesce pe XX' intr'un punt I. A determină distanţa acestui din urmă punt de puntul O.—

7°. Care-i productul immulţirei monomului a^m prin a^{-n}?

8°. A demonstrà că: $a^{-m} a^{-n} = a^{-(m+n)}$

$a^{-m} : a^n = a^{-(m+n)}$; $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n}$.

9°. A forma productul cuantităţilor $a^{\frac{m}{n}}$ şi $a^{\frac{p}{q}}$. A formà cuoţientul $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}}$.—

86. *Nota.* ***Usul şi Calculul cuantităţilor negative.***

Inainte de a trece mai departe trebue a observà că această chestiune a *programei esamenului general de licee* este resolvită in mod implicit prin stabilirea regulelor din urmă pentru calculul cuantităţilor algebrice. In adevĕr modificănd, precum am făcut, definiţiunile operatiunilor fundamentale am obţinut regule generale aplicabile atăt cuantităţilor positive căt şi celor negutive. Aşa dar aceste din urmă se adună, se substrag, se immulţesc şi se impărţesc după aceleşi regule ca şi cuăntităţile positive.

CARTEA II.

Teoria ecuaţiunilor de gradul ănteiu.

87. ***Definiţiuni.*** Cănd doue cuantităţi sunt legate intre ele prin semnul=, pre cum $a=b$, atunci constituesc ceia ce se numesce o *ecualitate.*

O ecualitate este dar *espresiunea relaţiunei de mărime intre doue cuantităţi care au aceiaşi valoare.*

O ecualitate poartă numele de *ecualitate identică* sau *identitate* cănd cuantităţile legate prin semnul=, sunt invederat ecuali sau cănd conţinĕnd litere remăn neincetat ecuali pentru toate valorile particulare atribuite acestora. Astfeliu

$$a+b=b+a\,;$$
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$
$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

sunt identităţi, căci membrul ăntĕiu al fie-căreia din ele remăne respectiv ecuale cu al doilea or-cari ar fi valorile date lui a, b, x, şi y.

O ocualitate se numesce *ecuaţiune* cănd espresiunile algebrice ale membrului ăntĕiu şi al duoilea, devin identice numai pentru un numĕr determinat de valori atribuite literilor ce cuprind.

Astfeliu ecualitatea

$$5x+3=3x+9 \quad 1)$$

este o ecuaţiune; căci membrul ănteiu devine ecuale cu al duoilea numai pentru valoarea particulară $x=3$. Pentru or-care altă valoare numerică atribuită lui x, membrul ănteiu al acestei ecualităţi nu mai este ecuale cu al duoile.

Asemene $y^2+2y=4y+8$

sau $y(y+2)=4(y+2) \quad (2)$

este o ecuaţiune căci se transformă in identitate numai pentru valorile particulare $y=4$, $y=-2$.

Literile ale căror valori particulare fac identicu ecuali pe membrii unei ecuaţiuni, sunt necunoscutele ecuaţiunei. Valorile particulare inseşi se numesc *rădăcini* sau *soluţiuni* ale ecuaţiunei. Astfeliu 3 este o rădăcină a ecuaţiunei (1); 4 şi —2 rădăcinile ecuaţiunei (2); căci puse in aceste ecuaţiuni in locul necunoscutei corespundetoare, avem:

$5.3+3=3.3+9$ pentru ecuaţiunea (1);

$4^2+2.4=4.4+8$

$(-2)^2+2.(-2)=4.(-2)+8.$ } pentru ecuaţiunea (2).

Această propietate a rădăcinelor de a face membrii unei ecuaţiuni identicu ecuali intre ei, propietate care resultă din insăşi definiţiunea lor, se esprimă dicĕnd că ele *verifică* sau *satisfac* ecuaţiunea.

Nota. Din cele ce preced vedem că pentru ca un numĕr dat să fie rădăcină a unei ecuaţiuni, trebuie si este de ajuns ca substituitu fiind in locul necunoscutei în ecuaţiune, să facă membrii acesteia identicu eculi intre ei.

89. Numim *grad* intr'o ecuaţiune cel mai inalt dintre gradele deferiţilor termini in raport cătră necunoscute. Astfeliu ecuaţiunile următore:

$$3y^2+2x^2y=10x$$
$$3x^2+9x=-5$$
$$2x+3y=25$$

sunt, ănteia de gradul al treilea, a doua de gradul al duoilea şi a treia de gradul ănteiu.

90. Ecuaţiunile se disting intre ele după gradul lor şi după numerul necunoscutelor ce cuprind. Aşa in ecuaţiunile precedente ănteia este de *gradul al treilea* cu *duoe necunoscute*, a doua de *gradul al doilea cu o singură necunoscută*; *a treia de gradul ăntei* cu *duoe necunoscute*. Afară de *grad* şi *numerul necunoscutelor* ecuaţiunile se mai impart in *ecuaţiuni numerice* şi *ecuaţiuni literale*.

O ecuaţiune se ḍice *numerică* cănd coeficienţii necunoscutelor şi terminii independenţi sunt numere particulare.

Esemplu. $3x^2+6x-2=4x+6$, in care coeficienţii sunt numerele 3, 6 şi 4 şi terminii independenţi de necunoscuta x sunt numerile -2 şi $+6$.

O ecuaţiune se ḍice *literară* cănd coeficienţii necunoscutelor sau terminii independenţi sunt ei insii representaţi prin litere. Esemplu: $ax+b=a'x+b'$, este o ecuaţiune *literară*, in care coeficienţii necunoscutei x sunt literele a, a', şi terminii independenţi b, b'.

91. Duoe sau mai multe ecuaţiuni se ḍic *ecuivalente* cănd admitu aceleşi rădăcini. Astfeliu ecuaţiunile:

$$3x+5=9x-7$$
$$4x+3=10x-9$$

Sunt ecuivalente, căci ambele sunt verificate prin valoarea particulară $x=2$.

92. Scopul ce căutăm a ajunge in teoria ecuaţiunilor fiind *resolvirea* lor, adică determinarea soluţiunilor ce admit, este evident că vom putè totdeauna substituì unei ecuaţiuni propusă o ecuaţiune ecuivalentă, de căte-ori resolvirea acestei din urmă ni va presintà oare cari avantage.

Transformarea unei ecuaţiuni date intr'o ecuaţiune ecuivalentă se basază pe căte-va tereome pre cari trebuie a le cunoasce.

92. ***Teorema I.*** *O ecuaţiunĕ propusă se transformă intr'o ecuaţiune ecuivalentă când mărim sau micşurăm ambii sei membri printr'un acelaş numer.*

Represintănd prin A espresiunea membrului ănteiu şi prin B acea a membrului al duoilea al ecuaţiunei propusă, aceasta se va scrí :

$$A=C. \quad (1).$$

Mărind sau micşurănd ambii membri ai acestei ecuaţiuni printr'un numĕr m vom avé :

$$A+m=B+m \quad (2)$$
$$\text{şi } A-m=B-m \quad (3)$$

Dic că aceste din urmă ecuaţiuni sunt ecuivalente cu ecuaţiunea (1). In adevĕr o soluţiune a ecuaţiunei (1) face espresiunea algebrică represintată prin A identicu ecuale cu acea represintată prin B. Ansă adunănd cătră aceste duoe valori ecuali un acelaş numĕr *m* este evident că vom obţinè duoe sume ecuali A+m=B+m. Această din urmă ecualitate fiind ănseşi ecuaţiunea (2) verificată, vedem că o soluţiune a ecuaţiunei (1) verifică ecuaţiunea (2). Vice-versa o soluţiune a ecuaţiunei (2) verifică ecuaţiunea (1). Pentru a demonstra aceasta, observăm că o soluţiune a ecuaţiunei (2), face A+m identic ecuale cu B+m. Ansĕ când *din duoe cuantităţi*

ecuale scădemu acelaș numĕr, obținem resturi ecuale. Scăḑind dar din cuantitățile ecuali $A+m$, și $B+m$ acelaș numer *m* vom capata resturile ecuali A și B, adică ecualitatea.

$$A=B$$

care este ecuațiunea (1) verificată Așa dar o soluțiune a ecuațiunei (2) verifică ecuațiunea (1); prin urmare aceste doue din urmă ecuațiuni sunt ecuivalente.

Printr'un raționament analog vom demonstrâ că ecuațiunea (3) este ecuivalentă cu ecuațiunea (1).

Notă. Usul acestei teoreme in resolvirea ecuațiunilor dă loc la o regulă practică, care poate fi designată subt numele de *regula transpunerei terminilor.*

Esemplu. Fie ecuațiunea

$$3x-5=2x+7 \quad (\alpha).$$

Adunănd $+5$ la ambii sei membri ceia ce in virtutea teoremei precedinți nu schimbă rădăcinile acestei ecuațiuni, vom avè:

$$3x-5+5=2x+7+5$$

$$\text{sau} \quad 3x=2x+7+5, \quad (\beta)$$

in care observăm că terminul -5 care figurâ in membrul ăntĕiu al ecuațiunei (α) a trecut in al doilea membru cu semn contrariu. Scăḑind acum din ambii membri ai ecuațiunei din urmă pe $2x$ ni va venì:

$$3x-2x=2x-2x+7+5$$

$$\text{sau} \quad 3x-2x=7+5 \quad (\gamma),$$

in care observăm asemene că terminul $+2x$ care figura in membrul al duoilea este trecut in membrul ănteiu cu semnul contrariu. Resumănd vedemu că putem

enunţa regula următoare: *Pentru a transpune un termin dintr'un membru intr'altul, este de ajuns a'l suprima din membrul in care se află şi a'l scri in celalalt cu semn contrariu.*

94. **Teorema II.** *O ecuaţiune nu'şi schimbă rădăcinile, sau se transformă in ecuaţiunea ecuivalentă, când immulţim sau impărţim ambii sei membri printr' un acelaş numĕr.*

Fie $A=D$ (1)
ecuaţiunea propusă. Immulţind sau impărţind prin un numĕr m ambii membri ai acestei ecuaţiuni, vom avè:

$$Am=Bm \quad (2)$$

$$\text{si } \frac{A}{m}=\frac{B}{m} (3)$$

Dic că aceste din urmă ecauţiuni sunt ecuivalente cu ecuaţiunea (1). In adevĕr o soluţiune a ecuaţiunei (1) face espresiunea A identică ecuale cu B. Immulţind şi impărţind ănsĕ in această ipotesă membrii acestei ecuaţiuni printr'un numer m vom avè:

$$Am=Bm$$

$$\text{şi } \frac{A}{m}=\frac{B}{m}$$

adică ecuaţiunile (2) şi (3) verificate; căci este evident că immulţind sau impărţind duoe cuantităţi ecuali, printr'un acelaş numer obţinem in inteiul cas producte ecuali, in al duoilea cas cuoţiente ecuali. Viceversa o soluţiune a ecuaţiunei (2) sau o soluţiune a ecuaţiunei (3) verifică ecuaţiunea (1). In adevĕr o soluţiune a ecuaţiunei (2) face pe Am identic ecuale cu Bm; ănsĕ impărţind aceste doue cuantităţi ecuali prin m obţinem ecualitatea.

$$A=B$$

adicĕ ecuaţiunea (1)verificată. De asemenea o soluţiune a ecuaţiunei (3) face pe $\frac{A}{m}$ identic ecuale cu $\frac{B}{m}$. Immulţind ănsă aceste doue cuantităţi ecuali prin *m* ajungem ăncă la ecualitatea

$$A=B$$

Aşa dar soluţiunile ecuaţiunilor (2) şi (3) verifică ecuaţiunea (1). De unde conchidem că aceste duoe ecuaţiuni, sunt ecuivalente cu ecuaţiunea (1), ceia ce era de demonstrat.

95. *Nota.* Ecuaţiunile (2) şi (3) incetează in general de a fi ecuivalente cu ecuaţiunea (1) cănd *m* este o cuantitate care se anulează sau care depinde de o necunoscută a ecuaţiunei propuse.

Esemplu. Fie propusă ecuaţiunea numerică

$$3x+5=7x-31 \quad (\varepsilon)$$

a căreia rădăcină unică este x=9. Ecuaţiunea ănsă

$$m(3x+5)=(7x-31).m \quad (\varepsilon')$$

cănd m=o, admite ca soluţiune toate valorile posibile a le literei *x* căci or ce multiplu al lui zero este zero; prin urmare această din urmă ecuaţiune nu mai este ecuivalentă cu ecuaţiunea (ε). De asemenea ecuaţiunea [ε') poate a nu mai fi ecuivalentă cu ecuaţiunea (ε] cănd m conţine o necunoscută.

Fie in ecuaţiunea (ε') m=x+2. Vom avé:

$$(x+2)(3x+5)=(7x-31)(x+2) \quad (\varepsilon').$$

Această din urmă ecuaţiune, afară de soluţiunea x=9, mai admite ca rădăcină valoarea particulară x=—2. Aşa dar această din urmă ecuaţiune cuprinde ***o soluţiune străină*** ecuaţiunei (ε), prin urmare nu'i este ecuivalentă.

Din contra cănd impărţim ambii membri ai unei ecua-

ţiuni prin un numer *m* care depinde de necunoscute, atunci ecuaţiunea transformată poate admite mai puţine rădăcini de căt ecuaţiunea propusă.

Esemplu. Fie ecuaţiunea literară

$$x^2-a^2=o \quad (\gamma)$$

a căreia rădăcini sunt $x=a$ şi $x=-a$. Impărţind ambii membri ai acestei ecuaţiuni prin $x+a$. vom avé:

$$\frac{x^2-a^2}{x+a}=o.$$

$$\text{sau}: x-a=o \quad (\gamma');$$

a căreia rădăcină unică este $x=a$. Aşa dar această din urmă ecuaţiune nu mai este ecuivalentă cu ecuaţiunea (γ).

96. Este de observat că soluţiunile nuoĕ introduse in ecuaţiunea transformată, prin immulţirea ecuaţiunei propuse cu un factor *m* dependent de necunoscute, precum şi acele cari dispar din ecuaţiunea propusă prin divisiunea acesteea cu cuantitatea *m*, se determină resolvind ecuaţiunea aucsiliară

$$m=o.$$

Astfeliu a doua soluţiune $x=-2$ a ecuaţiunei (ε') străină ecuaţiunei (ε) se determină cu ajutorul ecuaţiunei

$$x+2=o$$

obţinută prin anularea multiplicatorului $x+2$. De asemene soluţiunea $x=-a$ suprimată din ecuaţiunea (γ) prin divisiunea ecuaţiunei (γ) cu cuantitatea $x+a$, se determină ecualănd acest divisor cu zero ceia ce dă

$$x+a=o$$

$$\text{sau} \quad x=-a.$$

---

97. Redicarea la potenţă a membrilor unei ecuaţiuni introduce de asemene soluţiuni străine. Fie spre esemplu ecuaţiunea.

$$A=B \quad (\delta);$$

Redicănd la patrat avem

$$A^2=B^2 \quad (\delta').$$

Această din urmă ecuaţiune cuprinde soluţiuni străine ecuaţiunei (δ). In adevĕr putem scrì:

$$A^2-B^2=0$$

sau $(A+B)(A-B)=0$

care e verificată atăt prin valorile necunoscutelor cari fac pe A ecuale cu B, căt şi prin acele cari fac pe A ecuale cu $-B$.

Resolvirea ecuaţiunilor de gradul ănteiu cu o singură necunoscută.

98. In resolvirea ecuaţiunilor de gradul ănteiu cu o necunoscută, distingem duoe casuri principale, după cum ecuaţiunea propusă conţine numai termini intregì sau conţinè şi termini fracţionari.

Considerăm mai ănteiu casul simplu cănd ecuaţiunea este de forma

$$ax=b \quad (1).$$

In acest cas resolvirea este facilă, căci *pentru a determină valoarea necunoscutei x* este de ajuns a împărţi ambii membri *ai ecuaţiunei prin coeficientul a*, ceea ce in virtutea teoremei II nu schimbă soluţiunile ecuaţiunei propusă, şi ceea ce ni dă:

$$\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$$

$$\text{sau} \quad x=\frac{b}{a}.$$

Această formulă ni arată că ecuaţiunea (1) are o singură rădăcină represintată prin cuoţientul $\frac{b}{a}$.

99. Trecem acum la resolvirea casului general al terminilor intregi. Observăm pentru aceasta că diferiţii termini din ambii membri ai ecuaţiunei, nu pot fi decăt de duoe specii: termini dependinţi şi termini independinţi de necunoscută. Punĕnd in factor comun termini cari conţin necunoscuta şi represintănd prin căte o literă suma algebrică a terminilor cunoscuţi, ecuaţiunea se va scrì:

$$ax+b=a'x+b' \quad (2).$$

Spre a resolvì această ecuaţiune căutăm a o reduce la forma ecuaţiunei (1). Strămutănd terminul cunoscut b din membrul ănteiu intr'al duoilea şi terminul necunoscut $a'x$ din al duoilea membru in ănteiul, vom avè, după *regula transpunerei semnelor*:

$$ax - a'x = b' - b$$
$$\text{sau } (a - a')x = b' - b;\ (3)$$

de unde impărţind ambii membri prin coeficientul $(a - a')$ al necunoscutei x, ni va venì:

$$x = \frac{b' - b}{a - a'}\ (4).$$

Această valoare a necunoscutei x este adevarata şi unica soluţiune a ecuaţiunei propuse, căci ecuaţiunile prin cari am trecut pentru a ajunge la această determinare sunt toate ecuivalente cu ecuaţiunea (2), in virtutea teoremelor precedente.

100. Cănd ecuaţiunea propusă are atăt termini intregi căt şi fracţionari, atunci spre a o resolvì va fi de ajuns a o reduce la casul de mai inainte al terminilor intregi.

Fie, spre esemplu, ecuaţiunea

$$\frac{ax}{b} + cx - \frac{d}{e} = \frac{a'x}{b'} - c'x - \frac{d'}{e'}\ (5)$$

Pentru a face să dispară numitorii b, e, b,' e' vom immulţì ambii membri ecuaţiunei prin cel mai simplu multiplu al acestor numere. Ansă in acest cas cel mai simplu multiplu al numitorilor se confundă cu productul lor, căci sunt primi intre ei. Vom avè:

$$be.b'e'\left(\frac{ax}{b} + cx - \frac{d}{e}\right) = be.b'e'\left(\frac{a'x}{b'} - c'x - \frac{d'}{e'}\right)$$

sau $aeb'e'x + be.b'e'cx - b.b'e'd = a'be.e'x - be.b'e'c'x -$
$- beb'd$ (6).

Transpunĕnd terminii necunoscuţi din al duoilea membru in ănteiul şi terminii cunoscuţi din membrul ănteiu intr'al doilea, vom avè

$aeb'e'x + beb'e'cx - a'bee'x + beb'e'x = bb'e'd - beb'd'$
seu $(aeb'e' + beb'e'c - a'b.ee' + be.b'e'c')x = bb'e'd$
$- beb'd'$ (7)

Impărţind ambii membri ai acestei ecuaţiuni prin coeficientul polinom al necunoscutei x, ni va resultà valoarea

$$x = \frac{bb'e'd - beb'd'}{aeb'e' + beb'e'c - a''b.ee' + beb'e'c'} \quad (8)$$

care este soluţiunea ecuaţiunei propuse.

Fie ăncă propus a resolvì ecuaţiunea

$$\frac{mx}{15a^3b} + \frac{n}{21ac^2} = \frac{px}{25ab^2} + \frac{q}{5c^3d} \quad (9)$$

Formănd, după regula cunoscută, cel mai simplu multiplu comun al numitorilor, obţinem espresiunea

$$3\,5.^27\ a^3b.^2c^3d.$$

Immulţind ambii membri ecuaţiunei (9) prin această cuantitate şi făcĕnd simplificările posibile vom avè:

$$35bc^3dmx + 25a^2b^2cdn = 21a^2c^3dpx + 105a^3b.^2q \ (10);$$

de unde transpunĕnd intr'un membru terminii cari conţin necunoscuta şi in celalalt terminii independinţi, ni va venì

$35bc^3dmx - 21a^2c^3d.px = 105a^3b^2q - 25a^2b^2cdn$
sau $(35bc^3dm - 21a^2c^3d.p)x = 105a^3b^2q - 25a^2b^2cd.n$ (11)

de unde $x=\frac{105a^3b^2q-25a^2b^2cd.n}{35bc^3dm-21a^2c^3dp}$, soluţiune a ecuaţinnei propuse.

101. Resumând diferitele transformări ce aplicăm unei ecuaţiuni de gradul ântăiu cu o necunoscută pentru a o resolvì, putem formula regula generală următoare: 1°. *Facem să dispară numitorii dacă esistă, immulţind ambiì membri ai ècuaţiuneì prin cel mai simplu multiplu al lor*; 2°. *Transpunem terminii cari conţin necunoscuta intr'un singur mèmbru şi ceì independenţi in celălalt, facem reducţiunele posibile* şi *punem nècunoscuta in factor comun când terminii cari o cuprind nu sunt asemene*; 3°. *Impărţim apoi ambii membri ai ecuaţiunei prin coeficientul necunoscutei, ceea ce duce la determinarea soluţiunei căutate.*

Aplicaţiune. I Fie ecuaţiunea

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{7}+276=x. \ (\alpha)$$

Facem să dispară numitorii immulţind prin cel mai mic multiplu comun al lor, cena ce dă:

$$7x+5x+276.35=35x;$$

ducem terminii necunoscuţi in al duoilea membru, lăsând cel cunoscut in ânteiul şi avem

$$276.35=35x-7x-5x$$

sau $9660=35x-12x=23x$

sau $23x=9660$;

de unde $$x=\frac{9660}{23}=420. \ (\bar{\alpha})$$

Pentru a ne asigura in mod direct că această valoare

a lui x este adevěrata soluţiune a ecuaţiunei (α, este de ajuns a o substituí in locul lui x in această ecuaţiune, sciind că resultatul acestei operaţiuni trebue să fie o ecualitate identică. Făcĕnd astfeliu avem

$$\frac{420}{5}+\frac{420}{7}+276=420$$

sau $84+60+276=420$

sau $420=420.$

II. Fie ecuaţiunea literară

$$\frac{a}{x}+b=c-\frac{d}{x}. \quad (\beta)$$

Pentru a o resolvì procedem in modul următoriu:

Ducem terminii in x in membrul ănteiu şi termini independenţi in membrul al duoilea, ceea ce ni dă

$$\frac{a}{x}+\frac{d}{x}=c-b$$

sau $\frac{a+d}{x}=c-b \quad (\beta')$

Immulţind ambii membrí ai acesteĭ ecuaţiuni prin numitorul x ni va veni

$$a+d=(c-b)x$$

sau $(c-b)x=a+d. \quad (\beta'')$

Aice este de esaminat dacă ecuaţiunea (β'') nu conţine soluţiuni streine ecuaţiunei (β); căci factorul prin care am immulţit ecuaţiunea precedentă este insăşi necunoscuta x. Soluţiunile ănsă streine ecuaţiunei propuse pre cari le poate avé ecuaţiunea (β') nu pot fi, precum scim, decăt soluţiuni ale ecuaţiunei aucsiliare

$$m=o,$$

care iu casul de faţă se reduce la $x=o$. Ansă valoarea *zero* nu este o soluţiune a ecuaţiunei 'β''), prin urmare această din urmă este ecuivalentă cu ecuaţiunea propusă. Aşa dar valoarea căutată a necunoscutei va fi

$$x=\frac{a+d}{c-b}$$

Resolvirea ecuaţiunilor de gradul ăntĕiu cu mai multe necunoscute.

102. *Definiţiuni.* Cănd mai multe ecuaţiuni cu mai multe necunoscute admit impreună aceleaşi soluţiuni, complecsul lor constituie ceea ce se numesce *o sistemă de ecuaţiuni simultane.*

Duoe sisteme de ecuaţiuni simultane se ḑic *ecuivalente* cănd au aceleaşi soluţiuni.

103. Resolvirea ănsă a unnei sisteme de ecuaţiuni simultane avĕnd de obiect determinarea soluţiunilor sale, vedem că vom putè totdeauna substitui unei sisteme propuse a se resolvì, o altă sistemă ecuivalentă. In operarea acestei substituţiuni ne serv teoremele următoare.

104. Teorema II. O sistemă de ecuaţiuni simultane se transformă într'o sistemă ecuivalentă cănd inlocuim una din ecuaţiuni prin ecuaţiunea ce căpătăm făcĕnd suma acesteea membru cătră membru cu una din celelalte; sau adunănd toate ecuaţiunile membru cătră membru, sau in fine adunănd toatĕ ecuaţiunile sistemei immulţite fiind afară de una din ele, prin factori nedeterminaţi diferiţi de zero.

Fie propusă sistema
$$\begin{aligned} A&=A' \\ B&=B' \quad (1); \\ C&=C' \\ D&=D' \end{aligned}$$

Dic că sistemele

$$\begin{aligned} A+B&=A'+B' \\ B&=B' \\ C&=C' \quad (2); \\ D&=D' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A+B+C+D&=A'+B'+C'+D' \\ B&=B' \\ C&=C' \quad (3); \\ D&=D' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A+\lambda B+\lambda' C+\lambda'' D&=A'+\lambda B'+\lambda' C'+\lambda'' D' \\ B&=B' \\ C&=C' \quad (4); \\ D&=D' \end{aligned}$$

sunt căte trele ecuivalente cu sistema (1).

In adevĕr o soluţiune or-care a sistemei (1) făcĕnd ambii membri ai ecuaţiunilor acestei sisteme identic ecuali intre ei va face A ecuale cu A' şi pe B ecuale cu B'; prin urmare această soluţiune va verifica şi pe ănteia ecuaţiune a sistemei (2) a căreia celelalte ecuaţiuni sunt identice cu ecuaţiunile corespundetoare a le sistemei (1); prin urmare soluţiunea considerată va verifica intreaga sistema (2). Vice-versa, o soluţiune a sistemei (2), face pe ambii membri at ecuaţiunilor acestei sisteme identici ecuali intre ei. Ansă ecuaţiunea a doua din această sistemă ni dă B=B', prin urmare ănteia se reduce la A=A'. Soluţiunea propusă face dar pe A ecuale cu A', pe B ecuale cu B', pe C ecuale cu C' şi pe D cu D'; prin urmare verifică sistema (1). Aşa dar aceste doue sisteme sunt ecuivalente. Tot astfeliu vom demonstra ecuivalenţa sistemelor (1) şi (3), (1) şi (4).

105. ***Teorema II.*** *Când una din ecuațiunile unei sisteme este resolvită in privirea unei necunoscute, atunci inlocuind această necunoscută prin valoarea sa in celelalte ecuațiuni, formăm o nuoă sistemă ecuivalentă.*

Fie propusă sistema

$$\begin{aligned} x&=A\\ B&=B'\\ C&=C' \quad (1).\\ D&=D' \end{aligned}$$

Dic că sistema ce vom deduce din aceasta transportând valoarea lui x din ânteia in celelalte ecuațiuni va fi o sistemă ecuivalentă. Fie $B_{,}$ $C_{,}$ $D_{,}$; $B'_{,}$ $C'_{,}$ $D'_{,}$ espresiunile lui B, C, D, B', C', D' când facem această substituțiune, vom avè:

$$\begin{aligned} x&=A\\ B_{,}&=B'_{,}\\ C_{,}&=C'_{,} \quad (2).\\ D_{,}&=D'_{,} \end{aligned}$$

O soluțiune or-care a sistemei (1) făcênd pe x ecuale cu A, vom pute, in celelalte ecuațiuni ale acestei sisteme, inlocui pe x prin A; ânsă această substituțiune transformă pe B și B' in $B_{,}$ și $B'_{,}$ pe C și C' in $C_{,}$ și $C'_{,}$; pe D și D' in $D_{,}$ și $D'_{,}$. Ecuațiunile dar a sistemei (1) se identifică atunci cu cele a le sistemei (2); așa dar soluțiunea considerată a sistemei (1) verifică sistema (2). Viceversa or-ce soluțiune a sistemei (2) verifică sistema propusă, căci A devenind identic ecuale cu x, vom putè pune in ecuațiunile următoare ale acestei sisteme in locul lui A pe x, și atunci $B_{,}$ se transformă in B și $B'_{,}$ in B'; $C_{,}$ in C și $C'_{,}$ in C'; $D_{,}$ in D și $D'_{,}$ in D'. Prin urmare aceste ecauțiuni vor devenì identice cu ecauțiunile corespundetoare a le sistemei (1), cu alte cuvinte sistema (2) prin această substituțiune va devenì identică cu sistema (1); prin ur-

mare soluţiunea considerată va verificà pe această din urmă. Sistemele (1) şi (2) sunt dar ecuivalente, ceia ce era de arătat.

106. Trecem acum la resolvirea insăşi a unei sisteme de ecuaţiuni de gradul ănteiu cu mai multe necunoscute. Distingem duoe casuri principale, după cum numerul ecuaţiunilor sistemei este ecuale sau neecuale cu numerul necunoscutelor. Insemnǎnd numerul ecuaţiunilor prin N_e şi acel al necunoscutelor prin N_u, primul cas principal de care ni propunem a ne ocupà va fi caracterisat prin condiţiunea.

$$Ne=Nu$$

Fie propus a resolvì sistema generală următoare:

$$\begin{aligned} ax+by&=c \\ a'x+b'y&=c' \quad (1) \end{aligned}$$

Pentru a facilità resolvirea acestei sisteme vom considerà mai ănteiu casul particulariu:

$$\begin{aligned} ax+by&=c \\ a'x&=c' \quad (1) \end{aligned}$$

Ecuaţiunea din urmă fiind cu o singură necunoscută ni va da imediat

$$x=\frac{c'}{a'}. \quad (3);$$

ănsă necunoscuta x represintănd prin ipotesa aceeaşi valoare in ambele ecuaţiuni a le sistemei, vom putè substituì in locul seu in ănteia ecuaţiune valoarea $\frac{c'}{a'}$ trasă din a duoa, ceea ce ni va dà:

$$a\frac{c'}{b'}+by=c$$

$$\text{sau } by = c - \frac{ac'}{a'} = \frac{ca' - ac'}{a'}$$

$$\text{sau } y = \frac{ca' - ac'}{ba'}. \quad (4)$$

Volorile (3) şi (4) constituesc impreună soluţiunea unică a sistemei (2); căci x admite o singură valoare $\frac{c'}{a'}$, din care pentru y resultă earăşi numai o singură valoare $\frac{ca'-ac'}{ba'}$.

Ducĕnd aceste valori in sistema (2) trebue să căpătăm ecualităţi identice. Găsim in adevĕr

$$\frac{a.c'}{a'} + \frac{b.(ca'-ac')}{ba'} = c$$

$$\text{sau } \frac{ac'}{a'} + \frac{ca'-ac'}{a'} = c$$

$$\text{sau } \frac{ac'}{a'} + c - \frac{ac'}{a'} = c$$

$$\text{sau } c = c.$$

$$\text{De asemenea } a'.\frac{c'}{a'} = c'$$

$$\text{sau } c' = c'$$

Vedem dar că resolvirea sistemei [2] este foarte simplă. *Este de ajuns a determinà mai ănteiu valoarea necunoscutei care intră singură in una din ecuaţiuni şi a o transporta apoi in ceialaltă ecuaţiune, care servă atunci a determina valoarea celeialte necunoscute.*

107. Spre a resolvi sistema (1) căutăm a o reduće la forma sistemei (2). Pentru aceasta este necesariu a face să dispară una din necunoscute dintr'o ecuaţiune a sistemei propusă, ceea ce se ḑice a *elimina* acea necunoscută. Această *eliminare* se poate face in diferite moduri cari constituesc pe atătea *metoade de resolvire* a unei sisteme de ecuaţiuni.

108. ***Metoada substituţiunei.*** Ni este propus a resolvì sistema

$$\begin{aligned} ax+by&=c \\ a'x+b'y&=c' \end{aligned} \quad (1)$$

Operăm asupra ecuaţiunei ănteia ca şi cănd valoarea unei din necunoscute a lui y, de esemplu, ar fi determinată, ceia ce ni va dà:

$$ax=c-by$$

sau $$x=\frac{c-by}{a}.$$

Această din urmă ecuaţiune fiind invederat ecuivalentă cu prima ecuaţiune $ax+by=c$, sistema următoare.

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{c-by}{a} \\ a'x+b'y&=c' \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

va fi asemene ecuivalentă cu sistema (1). In virtutea

ănsă a uniea din teoremele precedente, sistema (3) se transformă in sistemă ecuivalentă, dacă in locul lui x din a duoa ecuaţiune punem valoarea sa scoasă din ănteia. Vom avè astfeliu:

$$x=\frac{c-by}{a}$$

$$a'.\left(\frac{c-by}{a}\right)+b'y=c'$$

sau făcĕnd să dispară in a doua ecuaţiune numitorul şi separănd terminii vom obţinè sistema următoare ecuivalentă la răndul seu cu sistema (1).

$$x=\frac{c-by}{a} \quad (4)$$

$$(ab'-ba')y=ac'-ca'$$

care este de aceiasi formă cu sistema (2). Vom avè prin urmare

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

$$x=\frac{c-b\dfrac{ac'-ca'}{ab'-ba'}}{a'}=\frac{cab'-cba'-bac'+bca}{a(ab'-ba')}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \\ x&=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'} \end{aligned}\right\} (5)$$

valori cari compun impreună soluţiunea sistemei (1)

Resumănd vedem că in această metoadă *eliminarea unei necunoscute intr'una din ecuaţiunile sistemei se face sub-*

stituind in această ecauţiune in locul necunoscutei, valoarea sa scoasă din ceialaltă ecauţiune, de unde şi metoadei ce considerăm i s'a dat numele de *metoada substituţiunei* sau *metoada de eliminare prin substituţiune.*

Să aplicăm la un esemplu numeric. Fie propus a resolvì ecuaţiunile

$$3x+5y=47 \quad (\varrho)$$

$$5x+6x=62.$$

Vom avè
$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{47-5y}{3} \\ 5\frac{47-5y}{3}&+6y=62 \end{aligned}\right\} (q)$$

sau
$$x=\frac{47-5y}{3}$$

$$(18-25)y=62.3-5.47;$$

Sau immulţind prin —1 ambii membri ai ecuaţiunei a duoa a acestei din urmă sisteme, ni va venì

$$x=\frac{47-5y}{3}$$

$$(25-18)y=5.47-62.3$$

sau
$$x=\frac{47-5y}{3}$$

$$y=\frac{235-186}{7}=7$$

de unde va resultà pentru soluţiunea sistemei propuse

$$y=7$$

$$x=\frac{47-5.7}{3}=4.$$

109. ***Metoada Reducțiunei.*** In *metoada reducțiunei* eliminarea se face reducĕnd coeficientul necunoscutei ce voim a eliminà, la aceiași valoare in ambele ecuațiuni a le sistemei și adunănd sau subtrăgĕnd apoi ecuațiunile membru către membru, de unde și metoadei acesteia i se mai dă numele de *metoadă de eliminare prin adițiune și subtracțiune.*

Fie propusă sistema generală dejà considerată,

$$ax+by=c\ (\alpha)$$
$$a'x+b'y=c'.$$

Immulțind prima ecuațiune prin b', a duoa prin—b și adunăndu-le membru către membru, ni va resulta ecuațiunea fără y

$$(ab'-ba')x=cb'-bc'.$$

Combinănd această ecuațiune cu una or-care din ecuațiunile precedente, de esemplu cu ănteia vom capata in virtutea teoremei I sistema următoare ecuivalentă cu sistema (1)

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c \\ (ab'-ba')x=cb'-bc' \end{array}\right\}\ (\beta)$$

Ecuațiunea a duoa a acestei sisteme ni dă pentru valoarea lui x

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'};$$

acea a necunoscutei y se va determina ducĕnd in ăntĕea ecuațiune in locul lui x valorea sa, ceea ce va reduce această ecuațiune la o ecuațiune cu o singură necunoscută. Putem ănsă determina valoarea lui y precum am deter-

minat pe acea a luĭ x. Immulţind ăntĕea ecuaţiune a sistemei (1) prin $-a'$, a duoa prin a şi făcĕnd suma lor algebrică, ni va resulta ecuaţiunea fără x:

$$(ab'-ba')y=ac'-ca'$$

sau
$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

110. *Nota.* Cănd coeficienţii necunoscutei ce voim a elimina nu sunt primi intre ei, atunci spre a'ĭ reduce la aceeaş valoare in ambele ecuaţiuni *va fi de ajuns a immulţi ăntĕeà ecuaţiune prin productul factorilor primi necomuni aĭ coeficientului necunoscutei din a duoa. şi viceversa a immulţi a duoa ecuaţiune prin productul factorilor primi necomuni ai coeficientului necunoscutei din ănteia.*

Această metoadă presintă avantagiul de a efectua eliminaţiunea necunoscutei fără a introduce numitori in ecuaţiunea respectivă.

Esemplu. Fie propus a resolvi ecuaţiunile numerice

$$35x+42y=280$$
$$14x+8y=68.$$

Pentru a elimina necunoscuta y descompunem coeficienţii din ambele ecuaţiuni in factori primi şi avem:

$$42=2.3.7$$
$$8=2.2.2.=2.2^2.$$

Immulţind pe ănteia ecuaţiune cu productul 2.2 sau 2^2 ai factorilor primi necomuni coeficientului 42, şi pe a duoa

prin productul 3.7 ai factorilor primi necomuni coeficientului 2 din această ecuaţiune, vom avè:

$$140x+168y=1120$$
$$294x+168y=1428.$$

Scădind aceste ecuaţiuni membru către membru ý se eliminează şi pentru determinarea necunoscutei x ni resultă ecuaţiunea

$$(294-140)x=1428-1120$$

sau $154x=308$

$$x=\frac{308}{154}=2$$

Pentru eliminarea lui x immulţim ăntŏea ecuaţiune prin 2 şi a duoa prin 5 ceea ce ni dă:

$$70x+84y=560$$
$$70x+40y=340.$$

De unde $44y=220$

sau $y=\frac{220}{44}=5.$

111. ***Metoada Comparaţiunei.*** In metoada comparaţiunei aplicată la o sistemă de duoe ecuaţiuni cu doue necunoscute, eliminarea se face resolvind ambele ecuaţiuni in privirea necunoscutei ce ne propunem a elimina şi ecualănd intre sine valorile acesteea, după principiul că *doue cuantităţi ecuali cu o a treia sunt ecuali şi intre sine.*

Fie ăncă de resolvit sistema

$$\left.\begin{array}{l} ax+bx=c \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\}(\gamma).$$

Vom ave

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{c-by}{a} \\ x=\dfrac{c'-b'y}{a'} \end{array}\right\}(\delta)$$

Ecualănd espresiunile precedente ale necunoscutei x şi combinănd ecuaţiunea resultantă ca una din ecuaţiunile sistemei propuse, vom forma sistema următoare:

$$\left.\begin{array}{c} ax+by=c \\ \dfrac{c-by}{a}=\dfrac{c'-b'y}{a'} \end{array}\right\}(\varepsilon)$$

ecuivalentă cu sistema (γ); căci o soluţiune a acestei sisteme făcĕnd identic ecuale pre $ax+by$ cu c şi pre $a'x+b'y$ cu c', va verifica relaţiunile

$$x=\frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'},(\varepsilon')$$

prin urmare va verifica intreaga sistemă $(\varepsilon]$. Vice-versa

o soluţiune a acestei din urmă sisteme făcĕnd pre $ax+by$ identic ecuale cu c, va verifica relaţiunea

$$x=\frac{c-by}{a};$$

ănsă in virtutea ecuaţiunei a duoa a sistemei (ε), va fi verificată şi relaţiunea

$$x=\frac{c'-b'y}{a'} \text{ sau } a'x+b'y=c';$$

prin urmare soluţiunea considerată a sistemei (ε) verifică sistema (γ). Aceste duoe sisteme sunt dar ecuivalente.

Resolvind ecuaţiunea din urmă a sistemei (ε) vom obţinè valoarea necunoscutei y. Ducĕnd apoi această valoare in ănteia ecuaţiune vom determina pe acea a necunoscutei x.

111. *Nota.* Pentru determinarea practică a necunoscutelor x şi y, relaţiunile (ε') pot inlocuì cu avantagiu sistema (ε). In adevĕr aceste ralaţiuni scrise in mod separat, ni dau ecuaţiunile:

$$\frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'} \text{ şi } x=\frac{c-by}{a} \quad (\varepsilon'')$$

Din ăntĕia avem

$$a'(c-by)=a(c'-b'y)$$

$$\text{sau } (ab'-ba')y=ac'-ca'$$

$$\text{sau ăncă } y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

De unde relaţiunea din urmă a sistemei (ε'') ni va da;

$$x=\frac{c-b.\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}}{a}=\frac{cab'-bac'}{a(ab'-ba')}$$

$$\text{sau } x=\frac{a(cb'-bc')}{a(ab'-ba')}=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}.$$

---

112. ***Metoada lui Bezut.*** In metoada lui Bezut eliminaţiunea se face intr'un mod foarte lesnicios cu ajutorul unor factori nedeterminaţi, de unde şi metoadei acesteea i se mai dă numele de *metoada factorilor nedeterminaţi.*

Continuăm a consideră sistema

$$\begin{aligned} ax+by&=c \\ a'x+b'y&=c' \end{aligned} \quad (\varrho).$$

Immulţind ăntĕea ecuaţiune printr'un factor nedeterminat k. a duoa prin—1 şi făcĕnd suma lor membru cătră membru nĭ va venì, scriind necunoscutele in factori comuni:

$$(ak-a')x+(bk-b')y=ck-c'.$$

Combinănd această din urmă ecuaţiune cu una din ecuaţiunile propuse de esemplu cu ăntĕea, vom forma

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c \\ (ak-a')x+(bk-b')y&=ck-c' \end{aligned}\right\} \quad (q)$$

sistemă ecuivalentă cu sistema propusă.

Coeficienţi ambelor necunoscute, din a duoa ecuaţiune a acestei sisteme, conţinĕnd cuantitatea k, vom putè eliminà

pe or-care din ele supunĕnd factorul nedeterminat k la condiţiunea de a anulà coeficientul respectiv.

Vom avè astfeliu pentru eliminarea lui y.

$$bk-b'=o \quad (r)$$

relaţiune care servă a determinà valoarea lui k, şi in virtutea căreea ecuaţiunea ce considerăm se reduce la

$$(ak-a')x=ck-c';$$

de unde
$$x=\frac{ck-c'}{ak-a'}$$

Punĕnd in această formulă in locul lui k valoarea sa $\frac{b'}{b}$ trasă din ecuaţiunea (r) ni va venì

$$x=\frac{c\frac{b'}{b}-c'}{a\frac{b'}{b}-a'}=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$$

Pentru a determina valoarea celeealalte necunoscute este de ajuns a substituì lui x din ăntĕea ecuaţiune a sistemei (q) valoarea precedentă, ceea ce va reduce aceastã ecuaţiune la o singură necunocută y. Putem ănsă determinà in mod direct necunoscuta y fără a ni servì de valoarea lui x. Vom eliminà, pentru aceasta, necunoscuta x, supunĕnd factorul nedeterminat k la condiţiunea

$$ak-a'=o \quad (r').$$

care va servi a determinà valoarea lui k şi va reduce ecucţiunea a doua a sistemei (q) la

$$(bk-b')y=ck-c'$$

sau $$y=\frac{ck-c'}{ak-b'}$$

Substituind lui k din această formulă valoarea sa $\frac{a'}{a}$ trasă din relaţiunea (r'), vom avè:

$$y=\frac{c.\frac{a'}{a}-c'}{b.\frac{a'}{a}-b'}=\frac{ca'-ac'}{ba'-ab'},$$

sau $$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

114. Să aplicăm această metodă la esemplul numeric următoriu:

$$\left.\begin{array}{r}12x+7y=123\\ 8x-3y=13\end{array}\right\}(1)$$

Immulţind ănteia ecuaţiune printr'un factor nedeterminat k şi a doua prin —1 vom avè, adunăndu-le membru către membru;

$$(12k-8)x+(7k+3)y=123k-13 \quad (2)$$

Scim că această ecuaţiune luată impreună cu una din ecuaţiunile precedente formează o sistemă ecuivalentă cu sistema propusă. Anulănd ănsă in ecuaţiunea (2) coeficientul lui y, ni va veni

$$7k+3=o \quad (3)$$

$$\text{şi } (12k-8)x=123k-13 \quad (4)$$

sau $$x=\frac{123k-13}{12k-8}.$$

Punĕnd in această formulă in locul lui k valoarea sa $-\frac{3}{7}$, dedusă din relaţiunea (3), vom avé

$$x=\frac{-123.\frac{3}{7}-13}{-12\frac{3}{7}-8}=5;$$

de unde valoarea necunoscutei y se va determinà ducĕnd această valoare a lui x in una din ecuaţiunile propuse. Putem ănsă pentru determinarea lui y procede ca şi pentru acea a lui x. Eliminănd in ecuaţiunea (2) necunoscuta x vom avé:

$$12k-8=o \quad (5)$$

şi $$(7k+3)y=123k-13 \quad (6)$$

sau $$y=\frac{123k-13}{7k+3} (7).$$

Substituind lui k din această formulă valoarea sa $\frac{2}{3}$ trasă din relaţiunea (5) ni va resultà

$$y=\frac{123\frac{2}{3}-13}{7.\frac{2}{3}+3}=\frac{246-39}{14+3}=9;$$

aşa dar soluţiunea sistemei (1) se compune din valorile

$$\begin{cases}x=5\\ y=9.\end{cases}$$

115. *Nota.* Aplicând sistemei

$$\left.\begin{aligned} ax+by&=c \\ a'x+b'y&=c' \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

metoadele de resolvire espuse, am găsit soluţiunea

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cb'-bc}{ab-ba'} \\ y &= \frac{ac'-ca'}{ab'-a'} \end{aligned}\right\} (\beta).$$

Observând modul formărei acestor valori fracţionare cari au un numitoriu comun, putem formula regula practică următoare:

1o. *Numitorul comun se formează inmulţind coeficienţii necunoscutelor, din ambele ecuaţiuni cruciş de la stânga la dreapta şi de la dreapta la stânga şi scădînd din ăntêiul product pre al duoilea,* ceia ce ni dă $ab'-ba'$;

2o. *Numĕrătorul fie-căreia valori se deduce din numitoriu inlocuind coeficientul necunocutei prin al duoilêa membru al ecuaţiunei respective.*

Această regulă estinsă la o sistemă or-care de ecuaţiuni de gradul ănteiu, poartă numele de *regula lui Cramer,* după numele geometrului elveţian care a descoperito.

Aplicaţiunea sa la o sistemă de ecuaţiuni numerice serve a determina valorile necunoscutelor fără calcul de resoluţiune. Trebue ănsă pentru aceasta a fi puse ecuaţiunile sistemei subt forma ecuaţiunilor (α).

Esemplu. Fíe propusă sistema

$$\begin{aligned} 3x+5y&=61 \\ 4x+6y&=76. \end{aligned}$$

Formănd valorile necunoscutelor după regula precedentă vom avè

$$x=\frac{61.6-5.76}{3.6-5.4}=\frac{-14}{-2}=7$$

$$y=\frac{3.76-61.4}{3.6-5.4}=\frac{-16}{-2}=8$$

valori cari compun soluţiunea ecuaţiunilor propuse.

116. ***Resolvirea unei sisteme de trei ecuaţiuni de gradul ăntĕiu cu trei nocunoscule.***

Fie propus a resolví sistema

$$\begin{aligned} ax+by+cz&=d \\ a'x+b'y+c'z&=d \quad (1). \\ a''x+b''y+c''z&=d'' \end{aligned}$$

Un mod espeditiv pentru determinarea necunoscutelor x, y, z este următorul. Considerănd pentru un minut, pre z in cele d'intĕiu duoĕ ecuaţiuni ca fiind o cuantitate cunoscută vom scrì

$$\begin{aligned} ax+by&=d-cz \\ a'x+b'y&=d'-c'z. \end{aligned}$$

Aplicănd acum acestor duoĕ ecuaţiuni regula lui *Cramer* ni va resultà:

$$x=\frac{(d-cz)b'-b(d'-c'z)}{ab'-ba'}$$

$$y=\frac{a(d'-c'z)-(d-cz)a'.}{ab'-ba'}$$

Ducĕnnd aceste valori in ecuaţiunea a treia a sistemei (1) vom avé

$$a''.\frac{(d-cz)b'-b(d'-c'z)}{ab'-ba'}+b''.\frac{a(d'-c'z)-(d-cz)\ a'}{ab'-ba'}$$
$$+c''z=d''$$

sau $a''.[(d-cz)b'-b'd'-c'z)]+b''[a\ d'-c'z)-(d-cz)a']$
$$+ab'c''z-ba'c''z=ab'd''-ba'd';$$

sau ăncă $z\ [ab'c''-ba'c''+ca'b''-ac'b''+bc'a''-cb'a'']$
$$=ab'd''-ba'd''+bd'a''-ad'b''+da'b''-db'a''.$$

De unde

$$z=\frac{ab'd''-ba'd''+bd'a''-ad'b''+da'b'-db'b''}{ab'c''-ba'c''+ca'b''-ac'b''+bc'a''-cb'a''}.\quad(\gamma)$$

Pentru a determina valoarea necunoscutei y observăm că ecuaţiunile sistemei propuse remăn aceleşi cănd schimbăm c in b, b in c, z in y şi y in z. Atunci numai terminul in y, in fie care ecuaţiune ie locul terminului in z şi vice-versa. Vom avè

$$\begin{aligned}&ax+cz+by=d\\&a'x+c'z+b'y=d'\quad(2).\\&a''x+c''z+b''y=d''.\end{aligned}$$

Dacă presupunem că repeţim, asupra acestor ecuaţiuni, calculul precedent efectuat pentru determinarea lui z, formula finală ce vom căpăta va represinta valoarea lui y. Acest calcul ănsă nu va diferi de cel relativ la necunoscuta z, decăt numai prin permutarea literilor y, z, b şi c. Prin urmare formula finală corespundetoare va diferì de formula (γ) numai prin permutarea aceloraşi litere. Va-

loarea dar a necunoscutei y se va putè deduce fără calcul din formula (γ) schimbănd b in c, c in b şi z in y. Vom avè astfeliu

$$y=\frac{ac'd''-ca'd''+cd'a''-ad'c''+da'c''-dc'a''}{ac'b''-ca'b''+cb'a''-ab'c''+ba'c''-bc'a''} \quad (\delta)$$

După acelaş raţionament, valoarea lui x se va deduce din formula precedentă, schimbănd b in a, a in b şi y in x. Aceasta ni va da:

$$x=\frac{bc'd''-cb'd''+cd'b''-bd'c''+db'c''-dc'b''}{bc'a''-cb'a''+ab'c''-ba'c''+ca'b''-ac'b''} \quad (\varepsilon)$$

117. Să aplicăm acest procediu la sistema ecuaţiunilor numerice următoare:

$$\begin{aligned} 3x+7y+4z&=66 \\ 2x+6y+5z&=67, \quad (\alpha) \\ 5x+2y+9z&=78. \end{aligned}$$

Trecĕnd in al douilea membru terminii in z din cele d'intĕiu douĕ ecauţiuni, vom avè:

$$\begin{aligned} 3x+7y&=66-4z \\ 2x+6y&=67-5z \quad (\beta). \\ 5x+2y+9z&=78. \end{aligned}$$

Regula lui *Cramer* ni va dà

$$x=\frac{(66-4z)6-(67-5z)7}{3.6-7.2}$$

$$y=\frac{(67-5z)3-(66-4z)2}{3.6-7.2}$$

sau
$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{11z-73}{4} \\ y&=\frac{69-7z}{4} \end{aligned}\right\} (\gamma)$$

Ducĕnd aceste valori in a treia ecuaţiune a sistemeĭ (β) vom avè:

$$5.\frac{11z-73}{4}+2.\frac{69-7z}{4}+9z=78$$

sau $$5(11z-73)+2(69-7z)+36z=312\,;$$

sau $$77z=539$$

de unde $$z=\frac{539}{77}=7.$$

Substituind lui z din formulele (γ) valoarea sa numerică, ni va resultà

$$x=\frac{11.7-73}{4}=1.$$

$$y=\frac{69-7.7.}{4}=5.$$

Aşa dar soluţiunea sistemei (α) este $x=1$, $y=5$, şi $z=7$.

118. *Nota.* In resolvirea sistemei

$$ax+by+cz=d$$

$$a'x+b'y+c'z=d'$$

$$a''x+b''y+c''z=d''$$

am eliminat cu ajutorul regulei lui Cramer pre x şi y din a treia ecuaţiune şi am determinat valoarea lui z. Putem ănsă procede in mod invers. Vom elimina mai ănteiu una din necunoscute, de esemplu x, in doue din ecuaţiunile acestei sisteme şi aplicănd regula lui Cramer vom determina y şi z. Ducĕnd apoi valorile acestor necunoscute in una din ecuaţiunile propuse vom determinà a treea necunoscută x.

Aplicănd pentra eliminarea lui x *metoada reducţiunei* care, după cum am vădut, are avantagiul de a ni da ecuaţiuni fără termini fracţiunari, vom avé:

$(ab'-ba')y+(ca'-ac')z=ad'-da'$ eliminànd x intre ăntĕea şi a doua ecuaţiune; şi

$(a'b''-b'a'')y+(a'c''-c'a'')z=a'd''-d'a'$ eliminănd x intre a duoa şi a treia.

De unde

$$y=\frac{(ad'-da')(a'c''-c'a'')-(ac'-ca')(a'd''-d'a'')}{(ab'-ba')(a'c''-c'a'')-(ac'-ca')(a'b''-b'a'')}$$

$$z=\frac{(ab'-ba')(a'd''-d'a'')-(ad'-da')(a'b''-b'a'')}{(ab'-ba')(a'c''-c'a'')-(ac'-ca')(a'b''-b'a'')}$$

Ducĕnd aceste valori in ăntĕea ecuaţiune a sistemei propuse vom gàsì

$$x=\frac{a'b''(cd'-dc')+a'c''(db'-bd')+a'b''(bc'-cd')}{(ab'-ba')(a'c''-c'a'')-(ac'-ca')(a'b''-b'a'')}.$$

119. Inainte de a ne ocupa de resolvirea unei sisteme de un numer or-care de ecuaţiuni de gradul ănteiu, să aplicăm ăncă sistemei precedente *metoada lui Bezut*, ceea ce va puté servi a ne da o idee clară asupra usului acestei metoade in general.

Avem

$$\begin{aligned} ax+by+cz &= d \\ a'x+b'y+c'z &= d' \quad (p). \\ a''x+b''y+c''z &= d'' \end{aligned}$$

Immulţind respectiv ănteia si a duoa ecuaţiune prin factorii nedeterminaţi k, k′ ; a treia prin —1 şi făcênd suma lor membru cătră membru vom avé :

$$(ak+a'k'-a'')x+(bk+b'k'-b'')y+(ck+c'k'-c'')z = dk+b'k'-d'' \quad (q).$$

Această ecuaţiune combinată cu duoe or-cari din ecuaţiunile (p) formează o sistemă ecuivalentă cu sistemă propusă. Ea ni presintă posibilitatea de a determina pre una din necunoscute eliminănd pre celalte duoe. In adevĕr factorii k şi k′ fiind nedeterminaţi ĭi putem supune la condiţiunea de a anula coeficienţii ai doue necunoscute, de esemplu x şi y, ceea ce ni va dâ :

$$\begin{aligned} ak+a'k'-a'' &= o \\ bk+b'k'-b'' &= o \end{aligned} \quad (r)$$

De unde ecuaţiunea (q) se reduce la

$$[ck+c'k'-c'']z = dk+d'k'-d''$$

$$\text{sau} \quad z = \frac{dk+d'k'-d''}{ck+c'k'-c''} \quad (r')$$

Aplicănd ecuaţiunilor (r) regula practică, vom găsì

$$k = \frac{a''b'-b''a'}{ab'-ba'}$$

$$k' = \frac{ab''-ba''}{ab'-ba'}.$$

Ducĕnd aceste valori in ecuaţiunea (r'), vom avé

$$z=\frac{d.\frac{a''b'-b''a'}{ab'-ba'}+d'\frac{ab''-ba''}{ab'-ba'}-d''}{c.\frac{a''b'-b''a'}{ab'-ba'}+c'\frac{ab''-ba''}{ab'-ab'}-c''}$$

sau $z=\frac{d(a''b'-b''a')+d'(ab''-ba'')-d''(ab'-ba')}{c(a''b'-b''a')+c'(ab''-ba'')-c''(ab'-ba')}.\ (r'')$

Sau ăncă

$$z=\frac{d(a''b'-b''a')+d'(ab''-ba'')+d''(ba'-ab')}{c(a''b'-b''a')+c'(ab''-ba'')+c''(ba'-ab')}\quad (s)$$

Vom găsi asemene

$$y=\frac{d(a''c'-c''a')+d'(ac''-ca'')+d''(ca'-ac')}{b(a''c'-c''a')+b'(ca''-ca'')+b''(ba'-ac)}\quad .(s')$$

$$x=\frac{d(b''c'-c''b')+d'(bc''-cb'')+d''(cb'-bc')}{a(b''c'-c''b')+a'(bc''-cb'')+a''(cb'-bc')}\quad (s'')$$

120. ***Resolvirea unei sisteme de* n *ecuaţiuni de gradul ântĕiu cu* n *necunoscute.***

Fie propus a resolvi sistema

$$\begin{aligned} A&=A' \\ B&=B' \\ C&=C' \\ D&=D'\quad (1) \\ &, \\ &, \\ &, \\ L&=L' \end{aligned}$$

pre care o presupunem compusă din n ecuaţiuni cu n necunoscute. Aplicăm metoada substituţiunei.

Resolvind ănteia ecuaţiune in privirea uneia din aceste necunoscute, de esemplu in privirea lui x, vom căpătá sistema ecuivalentă:

$$\begin{array}{l} x=A \\ B=B' \\ C=C' \\ D=D' \quad (2) \\ , \\ , \\ L=L' \end{array}$$

Substituind lui x din celelalte ecuaţiuni valoarea sa dedusă din ănteia, vom forma sistema ecuivalentă următoare:

$$\begin{array}{l} x=A \\ B_{,}=B'_{,} \\ C_{,}=C'_{,} \\ D_{,}=D'_{,} \quad (3) \\ , \\ , \\ , \\ L_{,}=L'_{,}; \end{array}$$

in care ănteia ecuaţiune conţine n necunoscute, ear celelalte n 1 ecuaţiuni conţin numai n—1 necunoscute. Spre a resolvi această sistemă va fi de ajuns a resolvi cele din urmă n—1 ecuaţiuni cu n—1 necunoscute; căci ducĕnd valorile acestora in ăntĕia ecuaţiune a sistemei 3) vom determina şi pre a n^a necunoscută x. Aşa dar *resolvirea unei sisteme de n ecuaţiuni cu n necunoscute se reduce la acea a une sisteme de n—1 ecuaţiuni cu n—1 necunoscutĕ.*

Rosolvind a duoa ecuaţiune a sistemei (3) in privinţa unei a duoa necunoscute y, şi ducĕnd valoarea sa in celelalte ecuaţiuni vom avé:

$x=A$
$y=B$
$C_2=D_2C'_2$ (4)
$D_2=D'_2$
,
,
,
$L_2=L'_2$.

Această sistemă ecuivalentă cu sistema propusă este mai simplă de căt cea precedentă, căci singură ănteia ecuaţiune conţine n necunoscute; a duoa conţine *n—1* ear celelalte n – 2 ecuaţiuni conţin numai *n*—2 necunoscute. Spre a resolvi această sistemă va fi de ajuns a resolvì cele din urmă n—2 ecuaţiuni cu n—2 necunoscute; căci ducĕnd valorile acestora in a duoa ecuaţiune vom determina valoarea lui y şi substituindu-le apoi impreună in ănteia vom determina şi pre acea a lui x. *Aşa dar resolvirea unei sisteme de ecuaţiuni de gradul änteiu cu n necunoscute* va fi astfeliu redusă la acea a unei sisteme *de n—2. ecuaţiuni cu n—2 necunoscute.* Continuănd in acest mod vedem că vom ajunge la o sistemă.

$x=A$
$y=B$
$z=C$ (m)
,
,
$L_{n\text{-}1}=L'$ $({}_{n\text{-}1})$

in care ănteia ecuaţiune cuprinde n necunoscute, a duoa *n—1,* a treia *n*—2 şi aşa pănă la cea din urmă

$L_{n\text{-}1}=L'_{n\text{-}1}$

care cuprinde o singură necunoscută. *Resolvirea acestei ultime ecuațiuni va determină una din necunoscutele sistemei propuse. Ducênd valoarea acesteèa in ecuațiunea penultimă, vom determinà o a duoa necunoscută ; și astfel treptat vom ajunge a determiná toate necunoscutele printr'un șir de resolviri de ecuațiuni de gradul ănteiu cu o singură necunoscută.*

121. ***Forme particulare a le ecuațiunilor de gradul ănteiu.*** Ecuațiunile diferitelor sisteme de a le căror resolvire ne-am ocupat până acum cuprindeau fie-care numĕrul total al necunoscutelor sistemei respective; se poate ănsă intimplá ca intr'o sistemă dată de ecuațiuni, să nu cuprindă fie-care ecuațiune toate necunoscutele. Atunci va fi avantagios a incepe cu eliminarea necunoscutei care intră in cel mai mic numĕr de ecuațiuni.

Fie, spre esemplu, de resolvit sistema

$$\begin{aligned} &4x-5y+2u=6\\ &3x+z-u=14 \quad (\alpha)\\ &7y+u-x=45\\ &y+2x-2z+u=10 \end{aligned}$$

Incepĕnd cu eliminarea lui z care intră numai in duoĕ din ecuațiunile propuse, vom avè

$$\begin{aligned} &z=14+u-3x\\ &y+x+u-2\ 14+u-3x)=10\\ &4x-5y+2u=6 \qquad (\beta)\\ &7y+u-x=45; \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} &z=14+u-3x\\ &y+8x-u=38\\ &4x-5y+2u=6 \qquad (\beta')\\ &7y+u-x=45. \end{aligned}$$

Resolvind a doua ecuaţiune a acestei sisteme in privirea lui y şi substituind valoarea sa in celalte doue din urmă, vom căpătà sistema:

$$z=14+u-3x$$
$$y=38+u-8x$$
$$44x-3u=196 \qquad (\gamma)$$
$$57x-8u=221.$$

Eliminănd, intre aceste doue din urmă ecuaţiuni, necunoscuta u prin metoada reducţiunei, vom avè

$$352x-171x=1568-663$$
$$\text{sau } 181x=905;$$

de unde $x=\frac{905}{181}=5.$

Ducănd acestă valoare in ecuaţiunea din urmă, ni va resulta pentru determinarea lui u.

$$57.5-8u=221$$
$$\text{sau } \quad 8u=285-221$$
$$\text{sau } \quad u=\frac{64}{8}=8.$$

Valorile lui x şi u duse in cele de'ntein doue ecuaţiuni a le sistemei (γ) ni dau

$$z=14+8-15=7$$
$$y=38+8-40=6$$

Aşa dar soluţiunea sistemei (α) sĕ compune din valorile

$$x=5$$
$$y=6$$
$$z=7$$
$$u=8.$$

122. Resolvirea unei sisteme de ecuaţiunĭ se poate asemene simplifica când ecuaţiunile sunt de forma

$$\begin{aligned} x+y+z+t&=a \\ y+z+t+u&=b \\ z+t+u+x&=c \quad (1) \\ t+u+x+y&=d \\ u+x+y+z&=e. \end{aligned}$$

In acest cas ecuaţiunile se ḑic simetrice in privirea necunoscutelor.

Observând că fie care necunoscută intră in acelaş mod in patru din ecuaţiunile acestei sisteme, vom obţinè adunându-le membru către membru:

$$4\,(x+y+z+t+u)=a+b+c+d+e$$

sau $$x+y+z+t+u=\frac{a+b+c+d+e}{4}. \quad (2)$$

Subtrăgĕnd succesiv din această ecuaţiune pre fie care din ecuaţiunele sistemei (1) vom determina imediat valorile necunoscutelor. Vom avè

$$x=\frac{a+b+c+d+e}{4}-b=\frac{a-3b+c+d+e}{4}$$

$$y=\frac{a+b+c+d+e}{4}-c=\frac{a+b-3c+d+e}{4}$$

$$z=\frac{a+b+c+d+e}{4}-d=\frac{a+b+c-3d+e}{4}$$

$$t=\frac{a+b+c+d+e}{4}-e=\frac{a+b+c+d-3e}{4}$$

$$u=\frac{a+b+c+d+e}{4}-a=\frac{b+c+d+e-3a}{4}$$

123 *Nota.* Cănd necunoscutele intră in acelaş mod in toate ecuatiunile sistemei ca in esemplul precedent, atunci resolvirea se face uşor or-care ar fi potenţa necunoscutelor.

Fie spre esemplu, sistema următoare:

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3&=a \\ y^3+z^3+t^3&=b \quad (3) \\ z^3+t^3+x^3&=c \\ t^3+x^3+y^3&=d \end{aligned}$$

Vom avé, adunănd aceste ecuaţiuni membru către membru

$$3[x^3+y^3+z^3+t^3]=a+b+c+d$$

sau $$x^3+y^3+z^3+t^3=\frac{a+b+c+d.}{3} \quad (4)$$

Scădind succesiv din această din urmă ecuaţiune pre fiecare din ecuaţiunile sistemei (3), vom avé:

$$x^3=\frac{a+b+c+d}{3}-b=\frac{a-2b+c+d}{3}$$

$$y^3=\frac{a+b+c+d}{3}-c=\frac{a+b-2c+d}{3}$$

$$z^3=\frac{a+b+c+d}{3}-d=\frac{a+b+c-2d}{3}$$

$$t^3=\frac{a+b+c+d}{3}-a=\frac{b+c+d-2a.}{3}$$

De unde estrăgĕnd rădăcina cubică din ambii membri ai ecuaţiunelor (5) vom capata valorile simple a le necunoscutelor. Vom avé:

$$x=\sqrt[3]{\frac{a-2b+c+d}{3}}$$
$$y=\sqrt[3]{\frac{a+b-2c+d}{3}}$$
$$z=\sqrt[3]{\frac{a+b+c-2d}{3}} \qquad (6)$$
$$t=\sqrt[3]{\frac{b+c+d-2a}{3}}.$$

124. Resolvirea unei sisteme de duoĕ ecuaţiuni se face foarte răpide cănd neounoscutele intră subt formă de sumă şi diferinţă.

Fie, spre esemplu, sistema

$$\begin{matrix} x+y=a \\ x-y=b \end{matrix} \quad 7)$$

Adunănd si scădind aceste ecuaţiuni membru către membru, vom avè

$$2x=a+b,$$

$$2y=a-b;$$

Saŭ $$x=\frac{a+b}{2}$$

$$y=\frac{a-b}{2}.$$

Aşa dar *cănd doue ecuaţiuni represintă, una suma a doue necunoscute, ceialaltă diferinţa lor, atunci valorile acestora se determină imediat făcend succesiv, suma şi diferinţa acestor ecuaţiuni.*

Nota. Aceiaşi regulă se poate aplicà sistemei următoare:

$$\left.\begin{array}{l} x^m+y^n=a \\ x^m-y^n=b \end{array}\right\} (\delta)$$

Adunănd şi şubstrăgĕnd aceste ecuaţiuni membru cătră membru, avem

$$\left.\begin{array}{l} x^m=\frac{a+b}{2.} \\ y_n=\frac{a-b}{2}. \end{array}\right\} (\delta')$$

De unde

$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt[m]{\frac{a+b}{2}} \\ y=\sqrt[n]{\frac{a-b}{2}} \end{array}\right\} (\delta').$$

125. ***Esaminarea casului caracterisatu prin condiţiunea*** $N_u><N_e$.

Trecem acum la esaminarea casului al duoilea principal cănd numĕrul ecuaţiunilor sistemei nu este ecuale cu numerul necunoscutelor. Acest cas principal se subimparte in alte duoe subordinate, după cum numĕrul necunoscutelor este mai mare sau mai mic de căt numĕrul ecuaţiunilor. .

1⁰. Fie mai ănteiu casul $N_u>N_e$. Vom avè, spre esemplu.

$$\left.\begin{array}{l} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d'. \end{array}\right\} (\varepsilon)$$

Trecĕnd terminii in z in membrii ai duoilea, sistema precedentă se va scrì:

$$\begin{aligned} ax+by&=d-cz \\ &\qquad\qquad (\varepsilon) \\ a'x+b'y&=d'-c'z. \end{aligned}$$

Regula lui Cramer ni va dà

$$x=\frac{(d-cz)b-b(d'-c'z)}{ab'-ba'}$$

$$y=\frac{a(d'-c'z)-(d-cz)a'}{ab'-ba'};$$

Sau

$$x=\frac{(db'-bd')+(bc'-cb')z}{ab'-ba'}$$

$$(\varepsilon'')$$

$$y=\frac{(ad'-da')+(ca'-ac')z}{ab'-ba'}$$

Aceste espresiuni a le necunoscutelor x și y verifică ecuațiunile sistemei (ε), or care ar fi valoarea lui z. In acest cas sistema propusă se ḑice ***nedeterminată,*** căci pentru or-ce valoare a necunoscutei z formulele (ε'') dau o soluțiune a ecuațiunilor (ε).

2⁰. Să considerăm acum casul subordinat $Nu<Ne$. Fie, spre esemplu, propus a resolvì sistema

$$\begin{aligned} 5x+8y&=47 \\ 7x-2y&=13 \\ 5x-y&=10 \\ x+12y&=22. \end{aligned}$$

Aplicănd, celor d'intĕiu duoĕ ecuațiuni, una din metoadele espuse găsim:

$$\begin{aligned} x&=3 \\ y&=4. \end{aligned}$$

Ducĕnd ănsĕ aceste valori in cele două din urmă, ni resultă

$$15-4=10$$

$$3+48=22,\text{ ceia ce este absurd.}$$

Sistema propusă este dar *imposibilă.* Ecuaţiunile se ḑic *incompatibile.*

126. Cănd in acest cas ecuaţiunile sistemei cuprind un numer n de coeficienţi literali ecuale cu diferinţa Ne—Nu, atunci sistema poate fi redusă a fi posibilă, supunĕnd aceşti coeficienţi la oare-cari condiţiuni algebrice numite *ecuaţiuni de condiţiune.*

Fie, spre esemplu, propusă sistema

$$x+7y=37$$

$$9x-2y=8 \quad (m)$$

$$3x+ay=5b-9a-1$$

$$5bx+4y=40+25a.$$

Cu ajutorul celor d'intĕiu două ecuaţiuni găsim

$$x=2$$

$$y=5.$$

Ducĕnd aceste valori in cele două din urmă vom avè:

$$6+5a=5b-9a-1$$

$$10b+20=40+25a$$

Sau $5b-14a=7$ (m')

$$10b-25a=20.$$

Aceste ecuațiuni sunt ***ecuațiuni de condițiune***, căci esprimă condițiunile la cari trebuie să satisfacă coeficienții a, b pentru ca sistema (m) să fie posibilă. Resolvindu-le avem

$$a=2$$
$$b=7.$$

Noțiuni asupra teoriei inecualităților.

127. *Definițiune.* Dicem că o cuantitate or-care a este mai mare de căt o altă cuantitate b cănd diferința algebrică $a-b$ à acestor cuantități este positivă sau $>o$.

Din această definițiune deducem ușor următoarele consecinți.

1°. ***O cuantitate positivă este mai mare de căt o cuantitate negativă or-care.***

Esemplu. $3>-9$

căci după regula generală a subtracțiunei algebrice avem

$$3-(-9)=3+9=12>o.$$

2°. ***D'intre două cuantități negative aceea este mai mare a căreia valoare absolută este mai mică.***

In adevěr vom scrì:

$$-3>-10\,;$$

căci $-3-(-10)=-3+10=7>0.$

Și in general insemnănd prin a și m numere absolute, vom avè

$$-a>-(a+m)$$

căci $-a-(-(a+m))=-a+a+m>o.$

3o. *Or-ce cuantitate negativă este mai mică dè căt zero.*

In ade vĕr afiind un numĕr or-care positiv, putem tot deauna scrì

$$o > -a;$$

căci avem $\qquad o-(-a)=+a$

128. ***Teorema I.*** *O inecualitate nu se schimbă (işi conservă sènsul) când mărim sau micşurăm ambii sei membri c'un acelaş numĕr.*

Fie inecualitatea

$$a > b. \quad (1)$$

Vom avé in virtutea definiţiunei

$$a-b > o \ (2)$$

Sau $\qquad a+m-m-b > o$

Sau $\qquad (a+m)-(m+b) > o \ (3);$

de unde $\qquad a+m > b+m \ (4).$

Vom puté asemene scri, fără a schimba inecualitatea (2).

$$a-m+m-b > o$$

sau $\qquad (a-m)-(b-m) > o;$

de unde $\qquad a-m > b-m \ (5).$

ceia ce demonstrà teorema I.

Din această teoremă resultă, ca şi in teoria ecuaţiunilor, o regulă practică pentru transpunerea terminilor dintr'un membrū intr'altul.

Esemplu. Fie $\qquad ax+b > a'x+b'.$

Scădind succesiv din ambii membri ai acestei inecualităţi b şi a'x vom avé:

$$ax - a'x > b' - b;$$

in care terminii a'x si b trecĕnd dintr'un membru intr'altul şi-au schimbat semnul.

127. ***Teorema II.*** *O inecualitate nu'şi schimbă modul seu de a fi, cănd immulţim ambii, sei membri printr' acelaş numĕr positiv.*

Fie inecualitatea

$$a > b.$$

sau $a - b > o.$ (6)

Immulţind printr'un factor m positiv, vom ave:

$$m(a - b) > o$$

sau $am - bm > o;$

de uude $am > bm.$ (7)

Impărţind a semne prin m inecualitatea (6) ni va veni

$$\frac{(a-b)}{m} > o$$

sau $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} >$

sau $\frac{a}{m} > \frac{b}{m};$ (8)

ceia ce demonstra teorema II.

130. *Nota.* Cănd numerul m cu care immulţim sau impărţim ambii membri ai unei inecualităţi este negativ, atunci inecualitatea resultantă işi schimbă modul seu de a fi.

Esemplu Fie $4>3$

sau $4-3>0.$

De unde immulţind prin —2, ni va venì

$$-2(4-3)<0$$

de unde $-2.4+2.3<0$

sau $-2.4<-2.3.$

Fie in general

$$a>b \quad (9)$$

sau $(a-b)>0. \quad (9)'$

Immulţind această inecualitate prin factorul negativ $-m$, vom obţine resultatul negativ $-m(a-b)$; prin ur mare vom scrì

$$-m(a-b)<0$$

sau $-ma+mb<0,$

sau $-ma<-mb \quad (10)$

De asemenea inecualitatea (9) impărţită prin *m* se va transformà in:

$$-\frac{a}{m}<-\frac{b}{m}(11).$$

Discuţiunea formulelor generale.

131. Ne vom mărginì la esaminarea formulelor:

1⁰ $x=\frac{b'-b}{a-a'}(\alpha)$ care represintă soluţiunea unei ecuaţiuni de gradul ănteiu cu o singură necunoscută; şi

2⁰. $$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$$

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'};\ (\beta)$$

cari represintă soluţiunea sistemei

$$ax+by=c$$
$$a'x+b'y=c'$$

Obiectul ce ni propunem in această cuestiune este esaminarea ipoteselor ce se pot face relativ la diferitele sisteme de valori a le literilor cuprinse in formule şi interpretarea formelor singulare sub cari se pot presenta atunci valorile necunoscutelor.

In această interpretare a formelor diverse ce vom intălni ne vom basa pe caracterul de generalitate ce trebuie să-l aibă formulele algebrice.

Fie mai ânteiu ecuaţiunea

$$ax+b=a'x+b' \quad (1)$$

a căreia soluţiune ni este dată de formula

$$x=\frac{b'-b}{a-a'}. \quad (2)$$

Doue casuri principale se pot presinta după cum numitorul

$$a-a' \text{ este } >< o$$
sau $$=o.$$

1⁰. Casul $a-a'><o$, nu presintă nici o dificultate; căci dacă avem in acelaş timp $b'-b><o$

atunci formula (2) ni dă o valoare unică positivă sau negativă pentru necunoscuta x.

Dacă $b'-b=o$

atunci formula (2) se reduce la

$$x=\frac{o}{a-a'}. \quad (3)$$

Ansĕ cuoţientul divisiunei lui zero printr'un numer or-care este evident ecuale cu zero; aşa dar valoarea necunoscuteĭ dedusă in acest cas din formula 2) este zero. Acest resultat al formulei este in acord cu ceea ce esprimă ecuaţiunea (1) in această ipoteză.

In adevĕr $b'-b$ fiind $=o$, vom avé $b'=b$; de unde suprimĕnd de o parte şi de alta din ecuaţiunea (1) cuantităţile ecuali b, b' aceasta va devinì:

$$ax=a'x$$

sau $$(a-a')x=o. \quad (4)$$

Ansĕ pentru ca un product de duoi factori să fie zero, trebuie ca unul din factori să fie ecuale cu zero. Antĕiul factor $(a-a')$ nu este zero, căcĭ considerăm caşul a $a'><o$; trebuie dar ca al doilea factor x să fie ecuale cu zero.

2°. Fie acum casul $a-a'=o$. Acestui cas principal corespund alte duoe casuri subordinate, după cum vom avé:

I $b'-b><o$
II $b'-b=o$.

In ăntĕiul cas formula (2) ni dă

$$x=\frac{b'-b}{o} \quad (5)$$

espresiune singulară, care după definiţiunea divisiunei nu presintă nici un inţeles; căci dividendul trebuind a fi ecuale cu productul cuoţientului prin divisor, nu se concepe in acest cas cum va trebui să fie cuoţientul x pentru ca immulţit fiind prin divisorul zero să ne deie un product determinat ecuale cu dividendul b′—b, care prin ipotesă nu este zero.

132. Pentru a dà un inţeles acestei forme subt care sé presintă valoarea necunoscutei, vom considerà fracţiunea $\frac{n}{\alpha}$ al căreia numeratoriu il presupunem constant şi al căreia numitoriu α este variabil şi se micşurează tindĭnd càtră zero.

Observănd că pentru α=n fracţiunea $\frac{n}{\alpha}=1$

pentru $\alpha=\frac{n}{10}$ .... $\frac{n}{\alpha}=10$

pentru $\alpha=\frac{n}{100}$ ..... $\frac{n}{\alpha}=100$

pentru $\alpha=\frac{n}{1000}$ ..... $\frac{n}{\alpha}=1000$;

şi aşa indefinit. Vedem ast-feliu că valoarea unei fracţiuni devine din ce in ce mai mare, cănd numitorul seu scade devinind din ce in ce mai mic. Cănd prin urmare numitorul unei fracţiuni va primì cea mai mică valoare absolută, adicĕ zero, atunci valoarea fracţiunei va putè fi considerată ca fiind maĭ mare de căt orce mărime dată. Aceasta se face dăndu-se valoarei corespundĕtoare a fracţiunei numele de *infinitul* şi insemnăndu-se prin notaţiunea ∞.

Aşa dar, după formula (5), necunoscuta x are o valoare

mai mare de cât or-ce mărime posibilă. In alte cuvinte nu se poate designa in acest cas o mărime care să poată fi de o potrivă cu valoarea necunoscutei. Aceasta o esprimăm scriind

$$x=-\frac{b'-b}{o}=\infty \ (6).$$

Să esaminăm acum dacă deducţiunea trasă in acest cas de a dreptul din ecuaţinnea (1) este in acord cu resultatul formulei (2); sau in alte cuvinte dacă această din urmă formulă este aplicabilă in casul propus.

Ipotesa $a-a'=o$, ni dă $a=a'$; de unde ecuaţiunea

$$ax+b=a'x+b'$$

Se reduce la $b=b'$; ceia ce este imposibil in casul subordinat $b'-b><o$ ce considerăm. Prin urmare ecuaţiunea (1) nu poate, in acest cas, a fi verificată prin nici o valoare determinată a necunoscutei x; este ănsě de observat că o valoare infinită a acestei necunoscute o verifică. In adevěr resultatul adiţiunei uneĭ cuantităţi or care determinate b sau b' către infinitul este tot infinitul, prin urmare pentru $a=a'$ şi $x=\infty$ ecuaţiunea

$$ax+b=a'x+b', \ (1)$$

va fi verificată. Este dar acord intre resultatul formulei (2) şi deducţiunea trasă, de-adreptul din ecuaţiunea (1).

133. Să considerăm acum casul caracterisat prin condiţiunile simultane:

$$\left.\begin{matrix} a-a'=o \\ b'-b=o \end{matrix}\right\} \quad \text{sau} \quad \left\{\begin{matrix} a=a' \\ b=b' \end{matrix}\right.$$

Formula (2) devine

$$x=\frac{b'-b}{a-a'}=\frac{o}{o} \quad (7).$$

Această formă, subt care se presintă valoarea necunoscutei nu are până acum pentru noi nici un înțeles.
Trebue ănsĕ a'i dá o semnificațiune compatibilă cu condițiunea esprimată de a dreptul de ecuațiune, dacă voim ca formula (2) să fie aplicabilă și in acest cas. Pentru aceasta introducem in ecuațiunea (1) ipotesa considerată

$$a=a'$$
$$b=b',$$

după care această ecuațiune se reduce la

$$ax+b=ax+b.$$

Această ecuațiune fiind *identică,* este verificată or care ar fi x. Cu alte cuvinte valoarea necunoscutei x in acest cas este *nedeterminată.* Așa dar va trebuì a considerà forma singulară $\frac{0}{0}$ din formula (7), ca *un simbol de nedeterminare.*

134. *Nota.* Une-ori simbolul $\frac{0}{0}$ representă o nedeterminare numai aparentă.

Esemplu. Fie espresiunea fracționară

$$\frac{x-2}{x^2-4}$$

Pentru $x=2$ numerătorul și numitorul acestei fracțiuni devin ecuali cu zero, prin urmare vom avè:

$$\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)_{x=2}=\frac{0}{0}$$

Această *nedeterminare* este numai aparentă. In realitate valoarea fracțiunei propuse, pentru $x=2$, este un numer determinat.

Observăm că putem scrì

$$\frac{x-2}{x^2-4}=\frac{x-2}{(x-2)(x+2)}=\frac{1}{x+2},$$

Așa dar vom avè

$$\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)_{x=2}=\left(\frac{1}{x+2}\right)_{x=2}=\frac{1}{4}.$$

Aceasta se intâmplă de câte ori cuantitatea fracționară propusă conține, la ambii sei termini un factor comun care se anulează pentru o valoare particulară atribuită uneia din litere. Pentru a face să dispară *nedeterminarea* este de ajuns pre cum am vĕḑut, a suprima factorul comun înainte de a introduce in espresiune, ipotesa valoarei particulare.

Esemplu. Avem astfeliu

I $$\left(\frac{x^2-a^2}{x-a}\right)_{x=a}=\frac{0}{0}$$

$$\left[\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}\right]_{x=a}=2a$$

II $$\left(\frac{x^m-1}{x-1}\right)_{x=1}=\frac{0}{0}$$

$$=\left[x^{m-1}+x^{m-2}\ldots+x+1\right]_{x=1}=m\,.$$

135. Trecem acum la discuțiunea formulelor generale

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} \\ y &= \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \end{aligned}\right\} (\beta)$$

cari represintă soluţiunea ecuaţiunilor

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\} (p)$$

Distingem duoe casuri după cum numitorul comun $ab' - ba'$ este diferit de zero, sau ecuale cu zero, ce ea ce se esprimă prin relaţiunile:

$$\text{I} \quad ab' - ba' >< o$$

$$\text{II} \quad ab' - ba' = o.$$

Anteiul cas $ab' - ba' >< o$ nu presintă nici o dificultate, căci or-cari ar fi numerătorii $cb' - bc'$, $ac' - ca$ formulele (β) dau pentru x şi y ca soluţiune a sistemei (p), valori positive sau negative finite şi determinate

Să ne ocupăm de al duoilea cas principal $ab' - ba' = o$ căruia sunt subordinate alte trei casuri secundare, după cum nici unul din numerătorii necunoscutelor nu este zero, sau numai unul singur; unul singur şi coeficienţii necunoscutei respective.

Fie $\quad 1^0. \quad ab' - ba' = o$
$\quad cb' - bc' >< o$
$\quad ac' - ca' >< o.$

Formulele (β) ni dau in acest cas

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{cb' - bc'}{o} = \infty \\ y &= \frac{ac' - ca'}{o} = \infty \end{aligned}\right\} (\beta')$$

Din discusiunea relativă la o ecuațiune cu o singură necunoscută scim că acest simbol ni arată că valoarea necunoscutelor x și y intrece or-ce mărime dată; cu alte cuvinte nu esistă valori pentru x și y cari să poată in casul considerat, verifică ecuațiunile sistemei (p). Introducĕnd in ecuațiunile acestei sisteme ipotesa

$$ab'-ba'=o$$

sau $$ab'=ba';$$

de unde $$b'=\frac{ba'}{a},$$ vom avè

$$ax+by=c$$

$$a'x+\frac{a'b}{a}y=c';$$

sau ăncă $$ax+by=c$$

$$ax+by=\frac{ac'}{a'}$$

sistemă *impósibilă,* căci $\frac{ac'}{a'}$ nu este ecuale cu c. Așa dar semnificațiunea formulelor (δ) este in acord cu resultatul dedus direct din ecuațiunile (p).

Fie

2°. Casul subordinat $ab'-ba'=o$
$cb'-bc'-o.$

Formulele (β) ni dau

$$x=\frac{o}{o}$$

$$y=\frac{ac'-ca'}{o};$$

ănsă și numĕrătorul lui y este zero. Pentru a ne a-

sigură despre aceasta observăm că din condiţiunile precedente, deducem

$$ab'=ba'$$

$$cb'=bc'$$

De unde

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$$

$$\text{şi} \quad \frac{c}{c'}=\frac{b}{b'}$$

Sau

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

Ecualănd raporturile estreme vom căpată:

$$\frac{a}{a'}=\frac{c}{c'}$$

$$\text{sau} \quad ac'=ca'$$

$$\text{sau} \quad ac'-ca'=o.$$

Prin urmare vom avĕ pentru ambele necunoscute acelaş simbol

$$x=\frac{o}{o}$$

$$(\beta'')$$

$$y=\frac{o}{o}$$

care după cum am vĕdut, indică *nedeterminare.*

Să esaminăm acum dacă acest resultat al formulelor (β) este in acord cu semnificaţiunea corespundetoare a ecuaţiunilor (p). Pentru aceasta introducem in aceste din urmă condiţiunile

$$ab'-ba'=o$$
$$cb'-bc'=o,$$

cari sunt ecuivalente cu ecualitatea raporturilor

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=k.$$

De unde

$$a=a'k$$
$$b=b'k$$
$$c=c'k.$$

Ducĕnd aceste espresiuni ale coeficienţilor a, b, c in sistema ecuaţiunilor (p), ni va veni

$$a'kx+b'ky=c'k$$
$$a'x+b'y=c'. \quad (p')$$

Suprimănd din ănteia ecuaţiune factorul comun k ambele ecuaţiuni ale acestei sisteme se reduc la o singură ecuaţiune cu doue necunoscute

$$a'x+b'y=c';$$

care scim că este *nedeterminată*, căci admite un numĕr infinit de soluţiuni.

Fie in fine

3⁰. Casul $ab'-ba'=o$

$$cb'-bc'=o$$
$$a=o$$
$$a'=o.$$

Formulele (β) ni dau

$$x = \frac{0}{0}$$

$$y = \frac{ac' - ca'}{0} = \frac{0}{0}.$$

Introducĕnd ănse in ecuaţiunile (p) condiţiunile de mai sus avem

$$0.x + by = c$$
$$0.x + b'y = c',$$

ecuaţiuni cari sunt verificate prin

$$y = \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$$

şi x putĕnd avé o valoare or-care, din causa coeficientului zero ce'l are in ambele ecuaţiuni. Aşa dar in privinţa lui x găsim aceiaşi *nedeterminare* care resultă şi din formulele (β). In privinţa valoarei lui y formulele par a fi in desacord cu deducţiunea scoasă direct din ecuaţiuni, căci pentru aceiaşi ipotesă ecuaţiunile ni dau

$$y = \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'},$$

pe când după formule avem

$$y = \frac{0}{0}.$$

Putem ănsĕ arăta că simbolul $\frac{0}{0}$ esprimă in acest cas o *nedeterminare* numai aparentă.

Avem

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'},$$

in care punĕnd in locul lui c valoarea sa $\frac{bc'}{b'}$ trasă din relaţiunea

$$cb'-bc'=o, \quad (\varepsilon)$$

ni va resultà
$$y=\frac{ac'-\frac{bc'}{b'}a'}{ab'-ba'}$$

Sau
$$y=\frac{ab'c'-bc'a'}{b'(ab'-ba')}=\frac{c'(ab'-ba')}{b'(ab'-ba')}$$

de unde
$$y=\frac{c'}{b'}.$$

Ansĕ in virtutea relaţiunei (ε) avem

$$\frac{c'}{b'}=\frac{c}{b}$$

de unde in fine
$$y=\frac{c}{b}=\frac{c'}{b'}$$

resultat identic cu acel dedus de-a-dreptul din ecuaţiunile (p). Prin urmare formulele (β) sunt aplicabile şi in acest din urmă cas considerat.

APLICAŢIUNE.

Probleme de gradul ăntĕiu.

---

136. In resolvirea or-cărei probleme se presintă duoe lucruri diferite :

1°. Punerea sau traducerea problemei in ecuaţiune ;
2°. Resolvirea acestei ecuaţiuni sau a sistemei de ecuaţiuni care resultă din esprimarea algebrică a problemei.

Această din urmă parte a resolvirei unei probleme nu presintă nici o dificultate teoretică, căci scim cum se resolve in or-ce cas o ecuaţiune sau o sistemă de ecuăţiuni de gradul ănteiu. Ansĕ pentru *punerea in ecuaţiune*, nu se poate dà o regulă precisă a căreia aplicare să ne poată duce imediat la espresiunea algebrică a problemei. Procediul general ce se intrebuinţază, pentru acest scop, consistă in a *esamina cu atenţiune enunciul problemei si a esprima cu ajutorul notaţiunilor algebrice relaţiunile ce esistă intre datele şi adevĕratele necunoscute ale problemei.*

137. ***Problema I.*** *Care-i numêrul care micşuratu fiind cu o pătrime din valoarea sa, devine ecuale cu jumătatea sa plus numĕrul* 35 ?

După enunciul problemei, resultatul format scăḑînd din valoarea numerului căutat pătrimea sa, este ecuale cu jumătatea sa adăugită către numerul 35. Insemnĕnd numĕrul necunoscut prin x şi scriind ecualitatea

ce esistă intre espresiunile algebrice ale acestor duoe resultate, vom avé:

$$x-\frac{x}{4}=\frac{x}{2}+35$$

care este ecuaţiunea problemei.

Immulţind ambii membri ai acestei ecuaţiuni prin 4 vom avé:

$$4x-x=2x+140$$

Sau $x=140$ care e numĕrul căutat.

138. ***Problema II.*** ***Suma a duoĕ numere fiind ecuale cu 25 şi diferenţa lor cu 7, cari sunt acele numere.***

Pentru punerea acestei probleme in ecuaţiune observăm că numerele căutate avĕnd o diferenţă sunt neecuale intre ele. Insemnănd pre cel mai mic prin x, cel mai mare va fi ecuale cu x plus diferenţa 7. Ecualănd suma lor cu numerul dat 25, vom avé

$$x+(x+7)=25,$$

care este ecuaţiunea problemei.

Resolvind'o găsim $x=9$; de unde numĕrul cel mai mare, adicĕ $x+7$ va fi $9+7=16$.

139. *Nota* I. Problema precedentă se mai poate resolvì considerănd'o ca problemă cu duoĕ necunoscute. Insemnănd in adevĕr numerele căutate prin x şi y vom avé esprimĕnd condiţiunile problemei

$$x+y=25$$
$$x-y=7.$$

Adunănd şi scădind succesiv aceste duoe ecuaţiuni membru către membru, vom căpătà

$$2x=32$$
$$2y=18;$$
Sau $$x=16$$
$$y=9.$$

140. *Nota II.* Când datelor numerice cuprinse in enunţarea unei probleme se substituesc litere, atunci problema respectivă se ḑice *generălisată.* Voind a generalisa, spre esemplu, problema ce precede, vom enunţa-o in modul următoriu: *Suma a duoe numere este s, diferinţa lor d, cari sunt acele numere?*

Considerănd mai ănteiu problema ca fiind cu o singură necunoscută, vom avé, insemnănd prin x cel mai mic din numerele căutate,

$$x+(x+d)=s,$$

de unde $$2x=s-d$$

sau $$x=\frac{s-d}{2}.$$

Al duoilea numĕr căutat va fi

$$x+d=\frac{s-d}{2}+d=\frac{s+d}{2}$$

Dacă, din contra, considerăm problema ca fiind cu douĕ necunoscute atunci, insemnănd prin x şi y numerele cerute, vom avé:

$$x+y=s$$
$$x-y=d.$$

De unde prin adiţiune şi substracţiune vom capată:

$$x=\frac{s+d}{2}$$

$$y=\frac{s-d}{2}.$$

141. ***Problema III.*** *Un ogar alungă un iepure care are 50 sărituri inaintea lui; ogarul face 5 sărituri pe când iepurele face 6, ănsĕ 9 sărituri de a le iepurelui fac numai 7 de ale ogarului, se intreabă câte sărituri va face iepurele inainte de a'l ajunge ogarul?*

50
O E x I — Pentru a facilità punerea in ecuaţiune a problemei observăm că insemnând prin x numĕrul căutat al săriturilor iepurelui, prin *a* mărimea unei sărituri; prin x′ numĕrul săriturilor ogarului şi *a′* mărimea săriturei sale, vom avè:

$$a'x' = 50a + ax \quad (\alpha).$$

Cuantităţile a,a′,x′ sunt necunoscute auxiliare cari se elimineazǎ uşor din această ecuaţiune, căci enunţarea problemei ni dă relaţiunile:

$$\frac{x'}{x} = \frac{5}{6} \text{ sau } x' = \frac{5}{6}x,$$

$$7a' = 9a \text{ sau } a' = \frac{9}{7}a.$$

Ducĕnd in ecuaţinnea (α) in locul lui *x′* şi *a′* valorile precedente vom avé:

$$\frac{9}{7}.a.\frac{5}{6}x = 50.a + ax$$

Sau $$\frac{15x}{14} = 50 + x;$$

De unde $$x = 700.$$

142. *Nota.* O introducere analogă de necunoscute auxiliare va servi a resolvi cu uşurinţă problema următoare:

Duoĕ tunuri A, B aruncă boambe intr'un oraş asediat. Tunul A a aruncat 36 boambe inainte de a fi inceput a funcţiona tunul B, şi aruncă 8 boambe in acelaş timp in care tunul B aruncă numai 7; ănsă tunul B intrebuinţează in 3 aruncături aceaşi cătime de praf pre care o intrebuinţază tunul A in 4: Se intreabă căte boambe trebuie să arunce al duoilea tun pentru ca se intrebuinţeză acei-şi cătime de praf ca şi ănteiul?

Procedĕnd ca in problema precedentă găsim ecuaţiunea:

$$ax=36a'+a'x'$$

in care $a'=\frac{3}{4}a$ şi $x'=\frac{8}{7}x$,

de unde $ax=36.\frac{3}{4}a+\frac{3}{4}a.\frac{8}{7}x$,

Sau $x=27+\frac{6}{7}x$

Sau $x=189$.

143. ***Problema IV*** *Corona oferită lui Jupiter de Hieron regele Siracusei era de 20 livre in greutate. Valoarea pondului sei specific determinat de Archimede era 16. Presupunĕndu-se că compositiunea coroanei era un aliagiu de aur şi argint şi sciind că pondul specific al aurului este de 19,64 şi al argintului 10,5 a găsi căt aur şi căt argint conţinea coroana?*

Insemnănd prin x pondul aurului şi prin y acela al argintului, vom ave o intăie ecuaţiune a problemei.

$$x+y=20. \quad (1)$$

Pentru a găsi a doua ecuaţiune observăm, că ceea ce se numesce pond specific al unui corp or-care C, fiind raportul intre pondul acestui corp şi pondul unui

portul intre pondul acestui corp şi pondul unui ecuale volume de apă, vom avè

$$p=\frac{P_c}{P_a} \quad (\alpha).$$

in care p representă pondul specific al corpului C, P_c pondul seu propriu ḑis şi P_a pondul apei cuprins subt un volume V ecuale cu volumele corpului C. Ansĕ dacă convenim a luà ca unitate de pond pondul apei cuprins subt unitatea de volume, atunci numĕrul care esprimă pondul apei va fi acelaş cu numerul care esprime volumele seu.

Vom avè astfeliu $P_a=V$.
Formula (α) va deveni dar

$$p=\frac{P_c}{V};$$

de unde $$V=\frac{P_c}{p} \quad (\beta),$$

ceea ce ni arată că impărţind pondul propriu ḑis al unui corp prin pondul seu specific, căpătăm mĕsura volumelui seu.

Aplicănd această formulă la problema propusă, vom avè ecuaţiunea:

$$\frac{x}{19,54}+\frac{y}{10,5}=\frac{20}{16}=\frac{5}{4},$$

adicĕ volumele aurului plus volumele argintului din aliagiu este ecuale cu volumele coroanei, admiţĕnd că pondurile specifice ale metalelor combinate remăn aceleşi.

Desfăcĕndu-ne de numitori vom avè

$$10,5x+19,64y=257,775 \quad (2).$$

Resolvind sistema formată de această din urmă ecuaţiune, şi ecuaţiunea (1) găsim

$$x=14,77$$
$$y=5,23.$$

144. ***Problema V.*** *Trei petrari A, B, C întreprind a construi un zidiu; A și B lucrând împreună ar putè să-l termine in 12 ḑile; B și C in 20 ḑile, A și C in 15 ḑile. Se intreabă cât timp ar trebui fie-cărui petrariu pentru a construi zidiul lucrând singur și cât timp li-ar trebui pentru a'l construi lucrând toți impreună?*

Insemnând prin a intinderea zidiului de construit, prin x timpul ce va intrebuinţă ănteiul petrariu, prin z timpul ce va intrebuința al duoile petrariu și prin y timpul ce va intrebuinţa al treilea petrariu pentru a termina zidiul lucrând fie care singur, vom avè:

$\frac{a}{x}$ lucrul făcut de petrariul A intr'o ḑi

$\frac{a}{y}$ . . . . B . . .

$\frac{a}{z}$ . . . . C . . .

Ansă după enunciul problemei petrarii A și B lucrând impreună vor termina zidiul in 12 ḑile, prin urmare vom avè:

$$12\left[\frac{a}{x}+\frac{a}{y}\right]=a$$

Esprimĕnd asemene celelalte duoe condiţiuni a le enunţărei vom căpăta ecuaţiunile:

$$20\left[\frac{a}{x}+\frac{a}{z}\right]=a$$

$$15\left[\frac{a}{x}+\frac{a}{z}\right]=a$$

Suprimĕnd din aceste ecuaț'uni factorul comun a și

impărţind ănteia prin 12, a doua prin 20 şi a treia prin 15, ni va resultà sistema

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20} \quad (\alpha)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{15}$$

Pentru resolvirea acestei sisteme procedem in modul următoriu. Adunăm căte-trele ecuaţiunile membru către membru, ceea ce ni dă:

$$2\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right]=\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}$$

Sau $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{24}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}=\frac{5+4+3}{120}$

Sau ăncă $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10} \quad (\beta)$

Scăḑind din această ecuaţiune pre a doua din ecuaţiunile (α) avem

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{1}{20}, \quad \text{de unde } x=20 \text{ ḑile,}$$

Scăḑind asemene din aceiaşi ecuaţiune succesiv pre a treia şi pre ănteia din sistema (α) găsim:

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{1}{30}, \quad \text{de unde } y=30 \text{ ḑile;}$$

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{1}{60}, \quad \text{de unde } z=60 \text{ ḑile.}$$

Insemnând prin *u* timpul intrebuințat la construcțiunea zidiului lucrând toți petrarii impreună, vom avé:

$$u\left[\frac{a}{x}+\frac{a}{y}+\frac{a}{z}\right]=a$$

Sau $$u\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right]=1$$

Punĕnd in această ecuațiune in locul lui x, y, z valorile aflate ni va veni

$$u\left[\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}\right]=1$$

Sau $$u\left[\frac{3+2+1}{60}\right]=1\,;$$

de unde $$u=10.$$

Interpretarea cuantităților negative considerate ca soluțiuni de probleme.

---

145. Resolvirea unei probleme ni dă une-ori o *cuantitate negativă* ca valoare a necunoscutei căutate. Pentru esplicarea ințelesului acesteea va trebuì a ne referì la insăși enunțarea problemei, din care dacă pentru necunoscută resultă posibilitatea de a avè douĕ moduri de esistență opuse, atunci valoarea găsită va fi admisibilă, căci negativitatea valoarei va arătà numai că necunoscuta are un mod de a fi opus celuia ce i s'a atribuit la punerea problemei in ecuațiune. Când din contra necunoscuta prin natura sa fisică sau prin condițiunile ce-i sunt puse in enunciu, nu poate avè de cât un singur mod de a

fi, atunci valoarea negativă găsită va fi neadmisibilă. Ea va fi in acest cas semnul unei imposibilităţi cuprinse in punerea problemei.

Pentru interpretarea soluţiunilor negative in asemene casuri se caută a se elimina imposibilitatea ce esistă rectificănd enunţarea problemei. Spre acest scop serve teorema următoare.

Teorema. Soluţiunea negativă a unei sisteme de ecuaţiuni de gradul ănteiu, luată in mod poşitiv, verifică acéastă sistemă, dacă schimbăm in ea semnul necunoscutelor.

Fie sistema

$$\begin{aligned} ax+by&=c \\ a'x+b'y&=c' \end{aligned} \quad (1)$$

a căreia resolvire presupunem că ni dă soluţiunea negativă :

$$\begin{aligned} x&=-\alpha \\ x&=-\beta \end{aligned} \quad (2).$$

Pentru a demonstrà ca această soluţiune luată in mod positiv, adicĕ

$$\begin{aligned} x&=\alpha \\ y&=\beta. \end{aligned}$$

verifică sistema

$$\begin{aligned} -ax-by&=c \\ -a'x-b'y&=c' \end{aligned} \quad (3),$$

observăm că avem prin ipotesă intr'un mod identic

$$\begin{aligned} -a\alpha-b\beta&=c \\ -a'\alpha-b'\beta&=c' \end{aligned} \quad (4).$$

Ansĕ valorile positive $x=\alpha$, $y=\beta$ duse in sistema (3) ni dau

$$-a\alpha-b\beta=c$$
$$-a'\alpha-b'\beta=c'$$

cari in virtutea relaţiunilor (4) sunt ecuaţiuni identice. Prin urmare soluţiunea negativă a sistemei (1) luată in mod positiv verifică sistema (3).

Nota. Este evident că teorema se aplică şi in casul când numai unile din necunoscutele sistemei propuse au valori negative, căci demonstraţiunea precedentă se poate repeţi atunci fără nici o schimbare.

147. Să vedem acum in ce mod se aplică această teoremă precum şi consideraţiunile ce-i preced, la interpretarea soluţiunilor negative in probleme.

Esemple: **Problema I.** *Pe o dreaptă indefinită se dau duoĕ punte A, B unul la o distanţă de 5 metri la stànga, altul la o distanţă de 22 metri la dreapta unui punt fics O; şi se caută pe această dreaptă un al treilea punt I astfeliu ca distanţa de puntul fics O a puntului mediu M luat pe segmentul BI să fie de o potrivă cu duplul distanţei AO, adicĕ să avem OM=2AO.*

5m 22m M
A I' O I B

Fie puntul căutat situat in I la dreapta puntului O. Insemnănd prin x distanţa sa de O vom avé:

$$OM=x+\frac{BI}{2}=2AO \quad (1).$$

Ansĕ $BI=OB-OI=22^m-x$. De unde relaţiunea precedentă va deveni

$$x+\frac{22-x}{2}=2AO,$$

sau $$\frac{22+x}{2}=10\,;$$

de unde $x=-2^m$.

Această soluțiune este admisibilă, căci după enunciul problemei distanța x poate avé duoe moduri de esistență opuse, puntul căutat putĕnd a se aflà la stănga sau la dreapta puntului fics O. Valoarea negativă -2^m ni arată in acest cas că puntul căutat se află in I′ la stănga puntului O la o distanță de duoi metri. In adevĕr această posițiune a puntului I′ verifică condițiunea

$$OM=2AO\,;$$

căci M fiind mijlocul lui BI′ ecuale in acest cas cu 24^m vom avé

$$OM=22^m-\frac{BI'}{2}=10^m$$

care este identic cu 2OA sau 2.5^m.

Poblema II. *Duoi curieri pleacă in acelaș minut din duoe punte A B depărtate intre ele prin o distuață*

a și se mișcă uniform in direcțiuneà AB, ănteiul cu o repegiune V al duoilea cu o repegîune V′. Se intreabă la ce departare dè puntul A, se va afla puntul lor de intèlnire I.

Insemnănd prin x distanța puntului I și prin t timpul ce se strecoară intre minuntul plecărei și minuntul intĕlnirei, vom ave:

$$x=Vt$$
$$x-a=V't\,;$$

de unde $\frac{x}{x-a}=\frac{V}{V'}$ (d)

sau $x=\frac{aV}{V-V'}$,(e)

Ni putem propune a discutà această formulă, adicĕ a esaminà ce resultate se deduc din ea in raport cătră diferitele ipotese ce se pot face asupra cuantităţilor V,V' a cari intră in espresiunea necunoscutei x.

Dĭstingem trei casuri după cum vom avé:

1⁰ $V>V'$
2⁰ $V=V'$
3⁰ $V<V'$.

1⁰. Repegiunea V fiind $>V'$; formula (e) ni arată că necunoscuta x va avé o valoare positivă mai mare de căt a, căci raportul $\frac{V}{V-V'}$ este >1. Formula ni mai arată că cu căt repegiunea V' va cresce apropiindu-se de V, cu atăt valoarea $\frac{aV}{V-V'}$ va fi mai mare; căci numĕrătorul aV remănĕnd constant şi numitorul $V-V'$ micşurăndu-se valoarea fracţiunei va cresce. Distanţa dar a puntului I de puntul A va devení in această ipotesă, din ce in ce mai mare.

Acest resultat, dedus din formulă, este in acord cu circumstanţile fisice ale problemei; căci este invederat, că cu căt repegiunea V' cu care se mişcă curierul din B, va fi mai mare, cu atăt va fi mai lung drumul percurs de curierul ce pleacă din A pentru a'l ajunge.

2⁰. Avem $V=V'$. In acest cas formula (e) devine $x=\frac{aV}{0}=\infty$, ceea ce ni arată că valoarea *necunoscutei*, in această ipotesă, este mai mare decăt or-ce mărime

dată, sau in alte cuvinte, că nu esistă o mărime ficsă care să poată în acest cas a fi ecuale cu valoarea distanței intre puntul A și puntul I.

Esaminănd, de-a-dreptul, circumstanțile fisice a le problemei ajungem la o conclusiune concordantă. In adevĕr in minuntul plecărei curierii se află depărtați intre ei prin distanța $AB=a$; mișcăndu-se ănsĕ cu aceiași repegiune vor remĕné neincetat la aceiași depărtare reciprocă, prin urmare nu se vor ajunge nici odată.

Dacă acum pe lăngă condițiunea $V=V'$ presupunem că avem in acelaș timp $a=o$, atunci formula (e) ni dă

$$x=\frac{o}{o}$$

simbol al unei *cuantităţĭ nedeterminate.*

Valoarea necunoscutei x este, in ácest cas, in adevĕr nedeterminată căci curierii plecănd din acelaș punt A și mișcăndu-se cu aceiași repegiune, se vor afla necontenit impreună; prin urmare fie-care punt, al drumului percurs, va pute fi considerat ca un punt al lor de întĕlnire.

3°. Avem $V<V'$. Ca valoare a necunoscutei x formula ni dă in acest cas

$$x=\frac{aV}{V-V'}=\frac{-aV}{V'-V}$$

care este o cuantitate negativă.

In general distanța unui punt or-care in raport cătră un punt fics luat ca origine, este de natură a admite duoe moduri de a fi opuse, prin urmare susceptibilă de semnul—. Totuș după cum este pusă problema de care ne ocupăm, necunoscuta V de și represintă o distanță, nu poate admite valoarea negativă

$-\frac{aV}{V'-V}$, căci direcţiunea mişcărei curierilor fiind precisată prin enunciu, distanţa x a puntului I de intălnire nu poate avé de căt un singur mod de a fi.

Soluţiunea negativă in acest cas este indicaţiunea algebrică a *unei imposibilităţi* cuprinse in enunţarea problemei. In adevĕr în ipotesa ce considerăm curierii pleacă in acelaş minut din puntele A, B şi se mişcă in direcţiunea A B. Repegiunea ănsĕ cu care se mişcă curierul din B fiind mai mare de căt acea a curieriului din A, este evident că acest din urmă nu va puté ajunge nici odată pre cel d'inteiu, prin urmare intălnirea lor este *imposibilă*.

148. Să căutăm acum a scoate din enunciul problemei condiţiunea imposibilă ce cuprinde in raport către casul, $V<V'$, şi a căreea dispariţiune trebuie să aibă de resultat reducerea soluţiunei negative $\frac{-aV}{V'-V}$ la valoarea positivă $\frac{aV}{V'-V}$.

Pentru aceasta ne servim de teorema demonstrată mai inainte, n⁰ (145).. Schimbăm in ecuaţiunea

$$\frac{x}{x-a}=\frac{V}{V'},$$

pe x in—x, ceia ce ni dă :

$$\frac{-x}{-x-a}=\frac{V}{V'};$$

$$\text{Sau } \frac{x}{x+a}=\frac{V}{V'}, \ (\beta)$$

Resolvind această din urmă ecuaţiune găsim

$$x=\frac{aV}{V'-V.} (e')$$

Problema a căreea enunţare algebrică va fi ecuaţiunea (β), va admite in casul $V<V'$ soluţiunea positivă $\frac{aV}{V'-V}$ dată de formula (e') şi *interpretarea soluţiunei negative* $\frac{-aV}{V'-V}$ ce ne o dă formula (e) consistă in formularea enunciului acelei probleme. Ansĕ x şi x+a fiind considerate ca represintănd drumurile percurse in acelaş timp de duoi curieri, V şi V' repegiunile respective a le acestora, ecuaţiunea (β) va fi traducerea problemei următoare: *Duoi curieri pleacă in acelaş minut din douĕ punte A,B depărtate intre ele printr'o distanţă AB=a, şi se mişcă in direcţiunea B A cu repegiunile respective V şi V'. Se intreabă la ce distanţă de puntul A se va aflà puntul lor dĕ intălnire?*

I' V V' — x A a B — In adevĕr I' fiind puntul de intĕlnire, x va represintà drumul percurs de ănteiul curieriu cu repegiunea V şi x+a drumul percurs de al doilea curieriu cu repegiunea V'. Mişcarea fiind presupusă uniformă, drumurile percurse de ambii curieri, in acelaş timp, sunt proporţionale cu repegiunile, prin urmare vom avè:

$$\frac{x}{x+a}=\frac{V}{V'}$$

adicĕ ecuaţiunea (β) dedusă din ecuaţiunea (d) prin aplicaţiunea teoremei menţionate. Vedem că această nouă enunţare care dă interpretarea soluţiunei negative $\frac{-aV}{V'-V}$ nu diferă de cea d'inteiu, de căt prin schimbarea sensului mişcărei.

Problema III. *Un proprietariu intrebuinţază un lucrătoriu in curs de 13 dile de vară şi-i retine din sala-*

riul seu 22 lei pentru oare-cari stricăciuni ce a făcut. O altă dată intrebuințază acelaș lucrătoriu in curs de 17 ḑile de iarnă, și-i plătesce duoi lei mai puțin de căt pentru o ḑi de vară; ănsĕ atunci îi dă mai mult 28 lei pentru a'l recompensa de zelul ce a intrebuințat la lucru. In ambele dăți lucrătoriul primesce aceeași sumă, se intreabă care-i plata unei ḑile de vară?

Insemnănd prin x necunoscuta problemei, vom ave:

$$13x-22=17(x-2)+28 \quad (1)$$

sau

$$13x-17x=22+28-34$$

Sau

$$-4x=16,$$

de unde

$$x=-4. \quad (2)$$

Această soluțiune este neadmisibilă, căci plata unei ḑile lucrătoare nu poate ave duoĕ moduri de esistență opuse.

Pentru a găsi o interpretare a acestei soluțiuni negative, vom aplicà ecuațiunei (1) teorema cunoscută ceia ce ni va dà:

$$-13x-22=17(-x-2)+28$$

sau

$$13x+22=17(x+2)-28 \quad (3)$$

a căriea soluțiune este

$$x=4$$

Ecuațiunea (3) este traducerea algebrică a problemei următoare:

Un proprietar intrebuințază un lucrătoriu curs de 13 ḑile de vară și ca recompensă pentru zelul intrebuințat la lucru îi dă 22 lei mai mult. O altă dată intrebuințază acelaș lucrătoriu timp de 17 ḑile de iarnă, și-i plătesce 2 lei mai mult de căt pentru o ḑi de vară, ănsĕ ii opresce 28 lei pentru oare-cari stricăciuni ce a făcut. In ambele dăți lucrătoriul primesce aceeași sumă. Se intreabă care-i plata unei ḑile de vară?

Această enunțare constituie interpretarea soluțiunei negative x=—4, căci traducĕnd'o algebricesce găsim ecuațiunea (3) a căreia soluțiune este x=4.

149. **Esercițiĭ.** 1⁰. *Intr'o recrutațiune de 594 oameni trei orașe A, B, C trebuiĕ să deie fie-care contingentul seu proporțional cu numĕrul locuitorilor ce are. Numerul ănsă al locuitorilor orașului, A stă către acel al orașului B precum 3 la 5; acel al locuitorilor orașului B către acel al orașului C precum 8 la 7; căți oameni va da fie-care oraș?*

A resolvi această problemă prin aplicațiunea *teoremei fracțiunilor ecuali.*

Soluțiune: x=144, y=240, z=210.

2⁰. *Anul descoperirei artei tipografice de către Gutenberg este un numĕr de patru cifre. Cifra unităților este duplul cifrei decilor; cifra mielor este ecuale cu escesul cifrei sutelor asupra cifrei decilor; suma tuturor cifrelor este ecuale cu 14. Dacă adăugăm către acest numĕr 4905 căpătăm un resultat ecuale cu inversa numerului căutat. Care este acel numĕr?*

Soluțiune: N=1436.

3⁰. *Duoi călători pleacă in acelaș minut din duoe locuri diferite A și B, unul spre altul. Intălnindu-se*

V ———————— V'
A ——— C ——— B

calculează fie care drumul ce a făcut și drumul ce'i mai remăne să facă. Cel ăntăiu găsesce că a făcut 30 kilometri maĭ mult de căt al duoilea și că-i mai trebuie ăncă 4 dile pentru a ajunge in B; celalalt află că va ajunge in A după 9 dile. Se intreabă care-i distanța intre puntele A și B?

Soluțiune: x=150 kilom.

4^0. *A găsi o fracţiune astfeliu că adăugind 5, la numĕrătoriu valoarea sa să devie ecuale cu 2, şi scădind 1 din numitoriu resultatul să fie ecuale cu* 1.

Soluţiune: $f = \frac{3}{4}$.

5^0. *O cuantitate de 32 ocă apă de mare conţine o ocă sare. Se intreabă cât cuantitate de apă bună va trebui a-i adăugi pentru a forma un licuid care in treideci şi duoĕ ocă să conţină numai 50 dramuri sau* $\frac{1}{8}$ *ocă de sare?*

Soluţiune: $x = 224$.

6^0. *Un comerciant a calculat că speculaţiunea ce a intreprins i-a produs un căştig de* 15⁰/₀ *asupra capitalului intrebuinţat, ceia ce ridică avutul seu actual la* 15571 *lei; cât era capitalul inainte de intreprindere.*

Soluţiune: $x = 13540$. lei.

7^0, *Suma a duoĕ numere este a, diferenţa patratelor este b, cari sunt acele numere?*

Soluţiune: $x = \frac{a^2+b}{2a}$, $y = \frac{a^2-b}{2a}$

CARTEA III

Despre progresiuni şi logaritmi.

150 ***Progresiuni aritmetice.*** Numim *progresiune aritmetică* sau *progrĕsiunĕ prin diferenţă un şir de cuantităţi astfeliu că diferinţa intrĕ una or-care şi precedènta sa este constantă.* Cuantităţile cari compun un asemene şir se numesc *terminii* progresiuneĭ şi diferinţa constantă care esistă intre duoi or-cari consecutivi se numesce *raţiunea* progresiunei.

Pentru a arătà că mai multe numere a,b,c,d,e,f formează o progresiune aritmetică, le scrim in modul următoriu :

$$\div a.b.c.d.e.f...\&$$

Dacă insemnăm prin r raţiunea acestei progresiuni atunci in virtutea definiţiunei de mai sus, vom avé

$$r=b-a=c-b=d-c=e-d=f-e=...$$

Cănd raţiunea r este o cuantitate positivă, atuncĭ terminii progresiunei merg crescĕnd şi progresiunea se ḑice *crescĕtoare.*

Esemplu Progresiunea

$$\div 2.5.8.11.14.17.$$

este o progresiune crescĕtoare a căreia *raţiune este* $+3$.

Cănd din contra raţiunea este negativă atunci terminii merg scăḑind şi progresiunea se ḑice *decrescĕtoare.*

In acest cas se află progresiunea

$$\div 20.17.14.11.8.5.2.-1.-4..\&$$

a căreia raţiune este—3.

151 ***Teorema I.*** *Intr'o progresiune aritmetică un termin or-care este ecuale cu ănteiul plus de atătea ori raţiunea căţi termini sunt înaintea lui.*

Fie progresiunea

$$\div a.b.c.d....g.h.k.l.$$

Vom avé, după definiţiunea progresiunilor aritmetice,

$$r=b-a=c-b=d-c=\&..$$

de unde $b=a+r$
$c=b+r=a+2r$
$d=c+r=a+3r$;

ceia ce ni arată că teorema este justificată pentru al duoilea, al treilea şi al patrulea termin. Ansĕ fiind justificată şi pentru al patrulea termin este evident că va fi justificată pentru al cincilea, caci după definiţiunea progresiunilor aritmetice terminul al cincilea va fi ecuale cu terminul al patrulea plus raţiunea, sau *ecuale cu ănteiul plus de patru ori raţiunea.* Fiind astfeliu verificată pentru al cincilea termin va fi verificată si pentru al şeselea şi aşa mai departe. Insemnănd dar prin l termnul care ocupă al n-lea loc in progresiune, vom avè:

$$L=a+(n-1)r. \quad (e)$$

ceia ce erà de arătat.

152. ***Aplicaţiuni. Problema I.*** *A calcula al 15 lea termin din progresiunea aritmetică a căreea terminul ănteiu este 3 şi raţiunea+5.*

Formula (e) ni dă

$$l=3+(15-1)5=73.$$

153. ***Problema II.*** ***A inserà intre duoĕ cuantităţi a,b un numĕr n de medii aritmetici.***

A inserà *n* medii aritmetici intre duoĕ numere a şi b este a găsi *n* numere cari impreună cu *a* şi *b* să formeză o progesiune aritmetică, in care *a* să fie ănteiul termin şi *b* cel de pe urmă. Observăm că intre a şi b trebuind să esiste n termini, inaintea lui b vor fi n+1, prin urmare aplicănd *teorema I* vom scri:

$$b=a+(n+1)r,$$

de unde pentru raţiunea r, care este necunoscuta problemei, vom avé

$$r=\frac{b-a}{n+1}. \quad (f)$$

Să aplicăm această formulă la un esemplu numeric. Fie propus a inserà intre numerile 6 şi 38, 7 medii aritmetici.

Vom avè, aplicănd formula precedentă:

$$r=\frac{38-6}{7+1}=\frac{32}{8}=4;$$

de unde inserţiunea medìilor căutaţi ni va dà progesiunea

$$\div 6.\ 10.\ 14.\ 18.\ 22.\ 26.\ 30.\ 34.\ 38.$$

154. *Nota I.* In virtutea *teoremei I* un termin orcare al unei progresiuni aritmetice putĕndu-se esprimà in funcţiune de ănteiul şi de raţiune, progesiunea aritmetică se va pute scri:

$$\div a.a+r.a+2r.a+3r.a+4r...a+(n-1)r..\&$$

Acest mod de a scrie o pregresiune ni arată că in casul lui $r>o$, valoarea terminilor merge crescĕnd impreună cu distanţa locului ce'l ocupa in progresiune. Se poate demonstra uşor că in asemenea ipotesă, presupunĕnd progresiunea nelimitată, ***esistă totdeauna un termin maĭ mare de căt or-ce mărime dată.***

In adevĕr, fie A o mărime fixă or-care. Dic că vom avè

$$a+(n-1)r>A\ ;$$

căci pentru aceasta va fi de ajuns ca numĕrul ordinal *n* al terminului considerat, să satisfacă relaţiunea

$$n>1+\frac{A-a}{r},\ (g)$$

ceea ce este totdeauna posibil intr'o progresiune nelimitată

155. ***Aplicaţiune.*** A găsì in progresiunea aritmetică următoare:

$$\div 1.1,5.2.2,5.3.3,5\ \ .\ \ .\ \ .$$

terminul al cărui valoare este mai mare de căt $(10)6$

Vom avè după formula (g)

$$n>1+\frac{(10)6-1}{0,5}$$

Sau $n>1+\frac{999999}{0,5}=1+\frac{9999990}{5}$

Sau $n>1999999.$

Aşa dar in progresiunea $\div$1.1,5.2.2,5 . . terminul al 2000000-lea va fi mai mare de căt $(10)^6$ sau 1000000

156. ***Problema II.*** *In or ce progresiune aritmetică suma a duoĭ termini ecuidistanţi de estremi, este ecuale cu suma estremilor.*

Fie progresiunea

$$\div a.b.c.d. \quad . \quad . \quad .g.h.k.l.$$

Avem după definiţiunea progresiunilor aritimetice
$b-a=c-b=d-c= \ . \ . \ =h-g=k-h=l-k;$
de unde ecualănd diferinţile estreme precum şi cele ecual departate de aceste, ni va venì

$$b-a=l-k \quad \text{sau} \quad b+k=a+l$$
$$c-b=k-h \quad \text{sau} \quad c+h=b+k.$$
$$d-c=h-g \quad \text{sau} \quad d+g=c+h.$$

ceia ce era de demonstrat.

157. *Nota.* Cănd progresiunea aritimetică propusă conţine un numĕr nepăreche de termini, atunci *duplul terminului din mijloc este ecual cu suma estremilor.*

In adevĕr însemnănd prin $2p+1$ numerul nepăreche al terminilor progresiune şi prin i terminul din mijloc, locul ce ocupă acest termin in raport cătrĕ estremi va fi al $(p+1)$lea, prin urmare vom avé, comparăndu-l succesiv cu ăntĕiul şi cel de pe urmă.

$$i = a + pr.$$
$$i = l - pr:$$
de unde $$2i = a + l.$$

158. ***Teorema III.*** *Suma terminilor unei progresiuni aritmetice este ecuală cu numĕrul terminilor immulţit prin semi-suma estremilor.*

Fie progresiunea

$$\div a.b.c.d....g.h.k.l.$$

Insemnănd prin S suma căutată a terminilor progresiunei, vom avé,

$$S = a + b + c + d + \ldots + g + h + k + l$$
au ăncă $$S = l + k + h + g + \ldots + d + c + b + a$$

Adunănd aceste ecualităţi membru către membru, ni va veni

$$2S = (a+l) + (b+k) + (c+h) + (d+g) + \ldots$$
$$+ (g+d) + (h+c) + (k+b) + (l+a),$$

in care după teorema II avem $a+l = b+k = c+h = \&\&$; prin urmare vom puté scri, insemnănd numĕrul terminilor prin *n*,

$$2S = n(a+l);$$
de unde $S = n\frac{(a+l)}{2}$ ceea ce erà de aretat.

159. APLICAŢIUNE. ***Problema I.*** *A calculá suma a 100 termini din progresiuuea aritmetică a cărea ăntĕiul termin este* 3 *şi raţiunea* + 5.

Vom avè, aplicănd formula precedentă,

$$S=\frac{100(3+l)}{2}=50(3+l)$$

in care l represintă terminul al 100^{-lea} al cărui valoare in virtutea teoremei I va fi

$$l=3+99.5=498;$$

de unne $S=50(3+498)=25050.$

160. ***Problema II.*** *A găsi suma celor n intĕi termini din progresiunea* $\div 1.3.5.7\ldots\ldots$

Avem $S=\frac{n(1+l)}{2}$,

in care *l* fiind al n^{-lea} termin al progresiunei, vom avè

$$l=1+(n-1)2=2n-1,$$

de unde $S=n\left[\frac{1+2n-1}{2}\right]$

sau $S=n^2$.

161. ***Progresiuni geometrice.*** Numim *progresiune geometrică* sau *progresiune prin cuoțient un șir de cuantități astfeliu că raportul uneea or-care la precedenta sa este un numĕr constant.* Cuantitățile cari formează un asemene șir se numesc *terminii* progresiunei geometrice și numĕrul constant care represintă valoarea raportului geometric al duoi termini consecutivi or-cari, se numesce *rațiunea progresiunei*.

Pentru a aretà că mai multe cuantități a, b, c, d, e.... formează o progresiune geometrică, scriem

$$\because a:b:c:d: \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Insemnănd prin q raţiunea progresiunei, vom avè după definiţiunea dată

$$q=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}\cdot\cdot\&.$$

Cănd raţiunea q este mai mare de căt unitatea, progresiunea geometrică se ḑice *crescĕtoare,* din contra cănd q este<1 atunci progresiunea se ḑice *descrescĕtoare*

Astfeliu $\div\!\div 3:6:12:24:48:\ldots$ este o progresiune geometrică crescĕtoare a căreea raţiune este 2;

$\div\!\div\ 3:1:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}:\frac{1}{27}:.$— este din contra o progresiune descrescĕtoare acăreea raţiune este $\frac{1}{3}$:

162. ***Teorema I.*** *Intr'o progresiune geometrică un termin or-care este ecuale cu ănteiul immulţit prin o potenţă a raţiunei a căreea grad este numĕrul terminilor cari preced.*

Fie progresiunea

$$\div\!\div a:b:c:d:e:\ldots:g:h:i:l\ldots:\ldots$$

Avem in virtutea definiţiunei

$$q=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\ldots=\frac{h}{g}=\frac{i}{h}=\frac{l}{i},$$

de unde

$$\begin{aligned} b&=a.q\\ c&=b.q\\ d&=c.q\\ e&=d.q\\ &\cdot\ \cdot\\ h&=g.q\\ i&=h.q\\ l&=i.q,\\ &\cdot\ \cdot\\ &\cdot\ \cdot \end{aligned}$$

cari ni arată că un termin or-care ecualu cu precedentul immulţit cu raţiunea.

Din aceste relaţiuni simple vom deduce prin substituţiuni succesive:

$$b=aq$$
$$c=aq^2$$
$$d=aq^3$$
$$e=aq^4$$

in care videm că teorema enunţată este adevĕrată pentru al 2^{lea}, 3^{lea}, 4^{lea}, şi al 5^{lea}, termin. Ansă fiind adevĕrată pentru al cincelea termin va fi adevĕrată şi pentru al 6^{lea}, căci un termin or-care este ecuale cu precedentul seu immulţit cu raţiunea. Fiind dar adevărată pentru al 6^{lea} termin va fi adevărată şi pentru al 7^{lea} şi asa mai departe. Prin urmare pentru terminul general l care presupunem că ocupă al n^{lea} loc in progresiune, vom avé:

$$l=aq^{n-1}$$ ceea ce ara de arătat.

163. După teorema precedentă cănd terminul ănteiu al unei progresiuni geometrice este a şi raţiunea q atunci progresiunea se va puté scrì precum urmează:

$$\div\div a:aq:aq^2:aq^3: \;.\;.\;.\;.\;.$$

Acest mod de a scri o progresiune geometrică ne permitè a aretà că in casul lui $q>1$ terminii progresiunei merg crescĕnd indefinit.

In adevĕr q fiind mai mare de căt unitatea vom putè pune

$$q=1+\alpha;$$

de unde progresiunea se va scri

$$(1)\div\div a:a(1+\alpha):a(1+\alpha)^2:a(1+\alpha)^3:\ldots:a(1+\alpha)^p:a(1+\alpha)^{p+1}:$$

Formănd diferinţa intre termini consecutivi, găsim:

$$a(1+\alpha)-a=a\alpha$$

$$a(1+\alpha)^2-a(1+\alpha)=a(1+\alpha)(1+\alpha-1)=a\alpha(1+\alpha)$$
$$a(1+\alpha)^3-a(1+\alpha)^2=a(1+\alpha)^2(1+\alpha-1)=a\alpha(1+\alpha)^2.$$

, ,

, ,

, ,

$$a(1+\alpha)^{p+1}-a(1+\alpha)^p=a(1+\alpha)^p(1+\alpha-1)=a\alpha(1+\alpha)^p$$

ceea ce ne arată că diferinţa intre duoi termini consecutivi merge crescĕnd de la un termin la altul. Ansă in progresiunea aritimetică crescĕtoare

(2) $\div a.a+\alpha.a+2\alpha.a+3\alpha....a+p\alpha.a+(p+1)\alpha.,$

diferinţa intre duoi termini consecutivi este constantă pe cănd totuş am vĕdut că terminii unei asemeni progresiuni merg crescĕnd indefinit. Prin urmare terminii progresiunei (1) cari cresc mai răpide de căt aceĭ ai progresiunei aritimetice, vor cresce cu atăt mai mult tindind cătră infinitul,

N*ota*. Aceasta propietate a terminilor unei progresini geometrice crescĕtoare şi nelimitată se poate demonstrà in mod direct

Fie $a,\ a(1+\alpha),\ a(1+\alpha)^2, ..a(1+\alpha)^{n-1},\ a(1+\alpha)^n...$

terminii progresiunei geometrice. Este evident că vom puté scri

$$a(1+\alpha)-a=a\alpha$$
$$a(1+\alpha)^2-a(1+\alpha)=a\alpha(1+\alpha)>a\alpha.$$
$$a(1+\alpha)^3-a(1+\alpha)^2=a\alpha(1+\alpha)^2>a\alpha.$$

, ,

, ,

, ,

$a(1+\alpha)^n-a(1+\alpha)^{n-1}=a\alpha(1+\alpha)^{n-1}>a\alpha.$ Adunănd ni va resultà: $a(1+\alpha)^n-a>na\alpha$

sau $a(1+\alpha)^n>\alpha+na\alpha.$ (s)

Espresiunea membrului al duoilea al acestei neecualităţi poate deveni mai mare decăt or-ce cuantitate dată A, căci pentru a satisface neecualitatea

$$a+na\alpha>A.$$

va fi de ajuns a indepliui condiţiunea

$$n>\frac{A-a}{a\alpha}$$

care e tot-deauna posibilă, cănd presupunem progresiunea nelimilată. Aşa dar terminul general $a(1+\alpha)^n$ care este mai mare de căt $a=n\alpha a$, va putè cu atăta maimult devini mai mare de căt or-ce mărime dată A.

164. APLICAŢIUNE. ***Problemă.*** *A inserà intre duoë numere* **a**, **b** *un numĕr* **m** *de medii geometrici.*

A insera *m* medii geometrici intre duoë numere a, b ecte a afla *m* numere care impreună cu a şi b să formeză o progresiune geometrică in care *a* să fie ănteiul termin şi *b* cel din urmă. Observăm că aceste numere se vor determinà uşor cănd vom cunoasce raţiunea progresiunei respective. Pentru aceasta avem:

$$b=ar^{m+1}$$

de unde $$r^{m+1}=\frac{b}{a}\text{ sau } r=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Nota. Cănd avem $b>a$ atunci raportul $\frac{b}{a}$ este >1.

Raţiunea $r=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ este ea insaşi in acest cas >1.

Se poate ănsă inserà intre *a* şi *b* un numĕr m indestul de mare de medii geometrici, pentru ca escesul raţiunei asupra unităţei să fie mai mic de căt o cuantitate δ, or căt de mică ar fi aceasta.

In adevĕr putem pune

$$r=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}<1+\delta \quad (t)$$

căci această inecualitate va fi satisfăcută când vom avé

$$(1+\delta)^{m+1}>\frac{b}{a} \quad (t')$$

Ansă in virtutea relaţiunei (s) putem scri

$$(1+\delta)^{m+1}>1+(m+1)\delta,$$

prin urmare pentru indeplinirea condiţiunei (t'), va fi de ajuns a avé

$$1+(m+1)\delta>\frac{b}{a};$$

de unde $$m+1>\frac{\frac{b}{a}-1}{\delta}$$

sau incă $$m>\frac{\frac{b}{a}-1}{\delta}-1$$

Aşa dar pentru ca escesul raţiunei r asupra unităţei să fie mai mic de căt o cuantitate dată δ, va fi de ajuns ca numerul *m* al meḑiilor inseraţi să fie mai mare de căt $\frac{\frac{b}{a}-1}{\delta}-1$ ceea ce-i tot-deauna cu putinţă.

165. ***Teorema II.*** *Când intre terminii consecutivi ai unei progresiuni geometrice inserăm acelaş numer de meḑii, progresiunile parţiale ce resultă din această inserţiune, formează impreună o singură progresiune.*

Fie dată progresiunea

$$\div\!\div a:b:c:d:\ldots:h:i:l.$$

Inserănd intre terminii consecutivi a, b; b, c; c, d; . . acelas numer *m* de medii geometrici, şi insemnănd prin r, r′, r″... raţiunile progresiunilor parţiale cari resultă din această inserţiune, vom avè:

$$r=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

$$r'=\sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}$$

$$r''=\sqrt[m+1]{\frac{d}{c}}$$

.
.
.

Ansĕ in progresiunea propusă avem prin definiţiune:

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=...\&\&;$$

prin urmare $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}=\sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}=\sqrt[m+1]{\frac{d}{c}}=.....$

Sau $r=r'=r''$.

Vom avè dar o singură progresiune

$$\div a:ar:ar^2:..:b:br:br^2:..:c:cr:cr^2:...$$

ceea ce erà de arătat.

166. ***Teorema III.*** ***Productul al duoi termini ècuidistanţi de estremi èstè eeualu cu productul estremilor.***

Intr'o progresiune geometrică

$$\div a:b:c:d:..:g:h:i:l$$

avem $q = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = .. = \frac{h}{g} = \frac{i}{h} = \frac{l}{i};$

de unde $\frac{b}{a} = \frac{l}{i}$ sau $bi = al$

$\frac{c}{b} = \frac{i}{h}$ sau $ch = bi$

$\frac{d}{c} = \frac{h}{g}$ sau $dg = ch$ ceea ce erà de arătat.

167. ***Teorema IV.*** *Productul terminilor unei progresiuni geometrice este ecual cu rădăcina patrată din potența productului estremilor, al căreea grad este numĕrul terminilor considerați.*

Fie progresiunea

$$\div\!\div\, a:b:c:\ldots:h:i:l$$

insemnând prin P productul căutat, vom avè:

$$P = a\,b.c\ldots h.i.l.,$$
$$P = l.i.h.\ldots c.b.a.$$

Immulțind aceste doue ecualități membru către membru vom obținè:

$$P^2 = (al)\,(bi)(ch)..(hc)\,(ib)(la)$$

sau $P^2 = (al)^n$; căci $al = bi = ch$ &&, in virtutea teoremei precedente.

Vom avè dar $P = \sqrt{(al)^n}$.

168. ***Teorema V.*** *Suma terminilor unei progresiuni geometrice èste ecualĕ cu terminul ultim immulțit cu rațiunea minus ăntèiul și impărțit totul prin escesul rațiunei asupra unităței.*

Fie $\div\div a:b:c:d:\dots:h:i:k:l$,

o progresiune geometrică compusă din n termini. Insemnând prin S suma acestora, vom avè:

$$S=a+b+c+d+\dots+h+i+k+l. \quad (1)$$

Immulţind ambii membri ai acestei ecualităţi prin raţiunea r, ni va veni:

$$Sr=ar+br+cr+dr+\dots+hr+ir+kr+lr \quad (2).$$

Scăḑind acum membru cătră membru relaţiunile (1) şi (2) căpătăm formula:

$$Sr-S=lr-a$$

Sau $S(r-1)=lr-a$

Sau $$S=\frac{lr-a}{r-1} \quad (3),$$

ceea ce erâ de demonstrat.

169. *Nota I.* Formula (3), poate fi pusă supt o altă formă. Terminul ultim fiind al n-lea prin ipotesă, vom avè:

$$l=ar^{n-1},$$

de unde $$S=\frac{lr-a}{r-1}=\frac{ar^n-a}{r-1}$$

sau $$S=a\cdot\frac{r^n-1}{r-1} \quad . (4)$$

care ni arată că *suma a n termini ai unei progresiuni geometrice este ecuale cu terminul ântèiu îmmulţit cu escesul potenţei a n^n a raţiunei asupra unităţei şi împărţit totul prin raţiunea minus unitatea.*

170. *Nota II.* Espresiunea lui S din formula precedentă să reduce la $\frac{0}{0}$ in casul $r=1$, pe când căutând di-

rect valoarea acestei sumi, o găsim ecuale cu *na* căci toți terminii progresiunei devin atunci ecuali cu *a*. S'ar părè dar că formula (4) nu este aplicabilă in casul particular al rațiunei $r=1$. Putem ănsă scoate din această formulă resultatul *na* ce se deduce in mod eirect din semnificațiunea cuantităței S. In adevĕr efectuănd divisiunea algebrică a cuantităței r^n-1 prin binomui $r-1$, găsim:

$$\frac{r^n-1}{r-1}=r^{n-1}+r^{n-2}+..+r+1;$$

de unde $S=a.\frac{r^n-1}{r-1}=a(r^{n-1}+r^{n-2}+...+r+1)$.

Făcĕnd in această din urmă espresiune $r=1$, valoarea parintesei se reduce la *n*, ceea ce ni dă:

$$S=na$$

Aplicațiune. *Cu ce este ecuale suma a 20 de termini din progresinnea geometrică acăreia auteiul termini este 3 și rațiunea 2?*

Aplicănd formula (4) aflăm:

$$S=\frac{3(2^{20}-1)}{2-1}=3(2^{20}-1)$$

Sau $S=3,145,725$.

171. *Nota III.* Formula (4) ni poate servi la calculul sumei terminilor unei progresiunei geometrice decrescĕtoare prelungită la infinit. In adevĕr in acest cas rațiunea progresiunei fiind mai mică de căt unitatea, vom puté pune

$$r=\frac{1}{1+\alpha},$$

de unde espresiunea sumei S va devenì:

$$S=a\frac{\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^n-1}{r-1}=a\frac{1-\left(\frac{1}{1+\alpha}\right)^n}{1-r}$$

sau $$S=\frac{a}{1-r}-\frac{a}{[1-r](1+\alpha)^n} \quad (5),$$

in care terminul $\frac{a}{(1-r)(1+\alpha)^n}$ devine din ce in ce mai mic când esponentul n al binomului $(1+\alpha)$ cresce. Ansă n represintă numĕrul terminilor cari compun suma S; prin urmare când presupunem progresiunea prelungită la infinit, atunci numerul *n* devine el insuş ecuale cu infinitul, terminul $\frac{a}{(1-r)(1+\alpha)^n}$ se anulează şi relaţiunea [5] să reduce la:

$$S=\frac{a}{1-r}.(6)$$

Această formulă ni arată că *suma terminilor unei progresiuni geometrice decrescĕtoare prelugită la infinit este ecuale cu terminul ântei impărţit prin escesul unităţei asupra raţiunei.*

172. ***Aplicaţiune. Esemplu I.*** *A calcula suma terminilor progresiunei*

$$\div 1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}: \ldots \&.$$

vom avè $$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Esemplu II. *A aplica formula* (6) *la transformarea unei fracţiuni periodice simple in fracţiune ordinară.*

Fie fracţiunea decimală periodică

$$0,\ 35\ 35\ 35\cdot\ 35\ \ldots$$

Vom putè scri, insemnănd prin F valoarea acestei fracţiuni,

$$F=\frac{35}{100}+\frac{35}{100^2}+\frac{35}{100^3}+\ldots\&$$

de unde formula (6) ni va dà:

$$F=\frac{\frac{35}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{35}{99}$$

173. ***Teorema VI.*** *Intr'o progresiune geometrică crescĕtoare terminii crescu prin graduri de mărime ori căt de apropiete vom voì, când escesul raţiunei asupra unităţei este indestul de mic.*

Pentru demonstrarea acestei teoreme ne basăm pe lema următoare:

Fiind dat un numer intreg n, o cuantitate positivă şi determinată a şi o cuantitate ε foarte mică şi positivă se poate tot deauna găsi o cuantitate positivă α care va satisface la condiţiunea

$$a\alpha[1+\alpha]^n<\varepsilon\ \ (m).$$

In adevĕr in equalitatea (m) va fi satisfàcută cănd vom avè:

$$\alpha<\frac{\varepsilon}{a(1+\alpha)^n},\ \ (m');$$

ănsă această din urmă condiţiune va esistà de sigur cănd vom avé:

$$\alpha < \frac{\varepsilon}{a(1+\varepsilon)^n} \qquad (p),$$

căci este evident că in virtutea relațiunei (m')

$$\alpha \text{ este } < \varepsilon$$

și prin urmare $\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^n} < \frac{\varepsilon}{(1+\alpha)^n}$

Așa dar pentru a asigurà indeplinirea condițiunei (m) va fi de ajuns a luà pentru α o cuantitate mai mică de căt $\frac{\varepsilon}{a(1+\varepsilon)^n}$.

Trecem acum la demonstrațiunea teoremei VI. Fie progresiunea geometrică crescĕtoare

$$\div a:b:c:d::\ldots\ \ldots:h:i:l:\ldots \& \qquad (1)$$

Insemnănd prin r rațiunea acestei progresiuni, avem prin ipotesă $r > 1$, prin urmare vom putè pune

$$r = 1+\alpha,$$

de unde progresiunea propusă se va scrì :

$$\div a:a(1+\alpha):a(1+\alpha)^2:\ldots:a(1+\alpha)^n:a(1+\alpha)^{n+1}:.\ \&. \qquad (2)$$

Formănd diferința intre terminul general $a(1+)\alpha^{n+1}$ și precedentul seu, avem :

$$a(1+\alpha)^{n+1} - a(1+\alpha)^n = a\alpha(1+\alpha)^n.$$

In această espresiune α, representănd escesul rațiunei r asupra unităței, poate fi or-căt de mic vom voi; căci este de ajuns, pentru aceasta, a presupune că intre terminii consecutivi ai progresiunei (1) s'a inserat un numĕr indestul de mare de medii geometrici. Atunci cuantitatea

$$a\alpha(1+\alpha)^n$$

va putè fi, in virtutea lemei precedente, mai mică de căt or-ce cuantitate dată ε. Prin urmare gradul de crescere ce intălnim in progresiunea (2), trecĕnd de

la un termin la următorul, poate fi mai mic de căt orce mărime dată ; in alte cuvinte *când escesul a al rațiunei asupra unităței va fi indestul de mic, terminii progresiunei vor cresce prin grade or-căt de apropiete vom voi.*

174. ***Logaritmi.*** *Definițiune. O sistemă de logaritmi se definesce printr'o sistemă de duoe progresiuni, una geometrică a căreea ănteiul termin este unitatea și alta aritmetică à căreea ănteiul termin este zero.*

Ast-feliu sistema progresiunilor următoare:

$$\left.\begin{array}{l} \div\!\div 1:a:a^2:a^3:a^4:\ldots:a^i:a^{i+1}\ldots \\ \div o.b.2b.3b.4b\ldots\ ib.(i+1)b\ldots \end{array}\right\}(1)$$

ni definesce o sistemă de logaritmi in care *numerile o, b, 2b, 3b, & cari formează terminii progresiunei aritmetice, se numesc logaritmii numerilor* 1, a, a^2, a^3... *& cari formează terminii corespondenți ai progresiunei geometrice.*

După această definițiune insemnănd logaritmul unui numĕr prin notațiunea *lg.* vom putè scri:

$$\begin{array}{l} lg.1=o \\ lg.a=b \\ lga^2=2b,\&\&. \end{array}$$

Care va fi ănsă logaritmul unui numĕr N care nu se află intre terminii progresiunei geometrice din sistema precedentă ?

Pentru a defini logaritmul unui asemene numĕr, presupunem că am inserat *m* medii intre terminii consecutivi ai progresiunilor acestei sisteme, ceea ce ni va dà:

$$\left.\begin{array}{l} \div\!\div 1:q:q^2:\ q^3:\ldots:a\ \ :aq:\ldots:q^n:\ \ q^{n+1}:\ldots:q^p\ \ q^{p+1}:\ldots \\ \div o.r.2r.3r\ldots b.b+r.\ \ldots nr.(n+1)r\ldots pr.(p+1)r\ldots \end{array}\right\}(2)$$

Doue casuri se pot intămplà, după cum N se va aflâ sau nu intre terminii progresiunei geometrice a sistemei (2). In casul ăntĕiu logaritmul numerului N va fi terminul corespundetoriu din progresiunea aritmetică. In casul contrariu când N nu coincide cu nici unul din terminii nuoĕi progresiuni geometrice, atunci spre a defini logaritmul acestui numĕr, observăm că, nuoa raţiune *q* a progresiunei geometrice, fiind presupusă mai mare de căt unitatea, potenţile sale succesive vor cresce indefinit; prin urmare vom găsi tot-deauna o potenţă a lui q superioară numĕrului dat N. Insemnănd prin q^{p+1} cea mai mică potenţa a raţiunei q care intrece valoarea lui N, atunci potenţă precedentă q^p, va fi mai mică de căt acest numĕr, ceia ce ni va dà:

$$q^p < N < q^{p+1}. \quad (3)$$

Ansă intre terminii consecutivi ai progresiunilor sistemei (1) am inserat *m* medii, prin urmare pentru raţiunea q vom avè:

$$q = \sqrt[m+1]{a},$$

in care numĕrul a fiind prin ipotesă mai mare de căt unitatea, raţiunea q va fi ea insaşi>1. Presupunĕnd că numĕrul *m* este indestul de mare, scim că raţiunea q va putè tot-deauna satisface la condiţiunea

$$q-1<\varepsilon \quad [4],$$

ε fiind o cuantitate foarte mică. Atunci, scim asemene că diferinţa intre terminii succesivi ai progresiunei geometrice va putè fi or-căt de mică vom voi. Considerănd terminii intre cari este cuprirs numĕrul N, avem:

$$q^{p+1}-q^p=q^p(q-1)<q^p.\varepsilon;$$

ănsă in virtutea relaţiunilor (3) $q^p<N$;

vom avè dar $q^{p+1}-q^p<N.\varepsilon$

care va putè fi mai mică de căt or ce mărime dată. Atunci diferinţa numĕrului N in raport cătră terminul q^p sau q^{p+1} fiind invederat mai mică de căt

$$q^{p+1}-q^p$$

va puté fi or căt de mică vom voi. Prin urmare când relaţiunea (4) va fi satisfăcută, terminul q^p sau următoriul seu q^{p+1} ni va dà, unul in *minus* altul in ***plus*** valoarea numĕrului N cu o aprocsimaţiune or căt de mare vom voi. Vom numi atunci logaritm al numĕrului N terminul corespundetoriu pr sau (p+1)r din progresiunea aritmetică, după cum, pentru acest numĕr, vom lua terminul q^p sau q^{p+1} din progresiunea geometrică. Vedem in acest chip că or-ce numĕr superior unităţei va avè un logaritm.

Cari vor fi ănsă logaritmii numerilor inferioare unităţei?

Pentru a defini logaritmii acestor numere, va fi de ajuns a prelungi la stănga progresiunile sistemei (2), ceia ce ni va da:

$$\left.\begin{array}{l} \ldots : \frac{1}{q^n} : \ldots : \frac{1}{q^3} : \frac{1}{q^2} : \frac{1}{q} : 1 : q : q^2 : \ldots : q^n : q^{n+1} : \ldots \\ \ldots -nr \ldots -3r . -2r . -r . \ o . r . 2r \ldots \ nr . (n+1)r \ldots \end{array}\right\} (5)$$

căci in progresiunea geometrică un termin or-care fiind, după definiţiune, ecuale cu precedentul immulţit prin raţiune, va fi in raport cătră următorul, ecuale cu acesta impărţit prin raţiune; şi asemene in progresiunea aritmetică un termin or-care fiind ecuale cu precedentul *plus* raţiunea, va fi in raport cătră următorul ecuale cu acesta *minus* raţiunea. *Numerile negative* —r, —2r, —3r, &, *termini ai progresiunei aritmetice, vor fi logaritmii numerilor inferioare unităței* $\frac{1}{q}, \frac{1}{q^2}, \frac{1}{q^3}$ & *termini corespundetori ai progresiunei geometrice.*

175 *Nota.* Când rațiunea geometrică q diferă foarte puțin de unitate, ceia ce am vědut că se poate totdeauna concepe, și rațiunea aritmetică *r* este o cuantitate positivă foarte mică, atunci presupunĕnd progresiunile sistemei (5) prelungite la stânga și la dreapta, dincolo de or-ce limită, terminii progresiunei geometrice vor represintà, intr'un mod continuu, toate numerile cuprinse intre zero și infinitul; iar acei ai proresiunei aritmetice, cari sunt respectiv logaritmii acestora, vor trece prin toate gradele de mărime cuprinse intre $-\infty$ și $+\infty$. Așa dar logaritmii numerilor cuprinse intre zero și 1 sunt cuantități negative cuprinse intre $-\infty$ și zero; pe când acei ai numerilor cuprinse intre 1 și ∞ sunt cuantități positive cuprinse intre zero și plus infinitul.

176. Se dă nume de *basă a unei sisteme de logaritmi numerului al cărui logaritm este unitatea.* Asteliu dacă in sistema (5) avem, spre esemplu,

$$nr=1 \quad (6),$$

atunci terminul corespundetoriu q^n din progresiunea geometrică va fi *basa* sistemei definite prin aceste duoě progresiuni.

177. ***Altă definițiune a logaritmilor.*** Insemnând prin *a* basa sistemei de logaritmi definiți prin sistema progresiunilor (5), vom avè:

$$q^n=a;$$

de unde $q=a^{\frac{1}{n}}$. Ănsă in virtutea relațiunei [6) avem $n=\frac{1}{r}$;

prin urmare $q=a^r$.

Sistema progresiunilor (5) se va scrî atunci:

$$\div\!\div\ldots:\frac{1}{a^3}:\frac{1}{a^{2r}}:\frac{1}{a^r}:1:a^r:a^{2r}:a^{3r}:\ldots:a:a^{1+r}.\ \ldots\ldots$$

$$\div -3r.-2r.-r.\ o.r.\ 2r.\ 3r\ldots.1.1+r.\ \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sau}\ \div\!\div:\ldots:a^{-3r}:a^{-2r}:a^{-r}:1:a^r:a^{2r}:\ldots:a:a^{1+r}:\ldots\ldots\\ \div\ldots-3r.-2r.-r.o.r.r.2r\ldots1.1+r.\ \ldots\ldots\end{array}\right\}(7).$$

Această din urmă sistemă este eeuivalentă cu sistema (5) in care am observat că terminii progresiunei geometrice pot represinta toate gradele de mărime cu-i prinse intre *zero* şi *plus infinitul*; prin urmare termini $a^{-r}, 1, a^r, a^{2r}$, & se vor afla in acelaş cas. Ansă terminii. $-r, o, r, 2r,$.. & logaritmi ai numerilor a^{-r}, 1, a^r, a^{2r}... & nu sunt alta de căt esponenţii respectivi ai potenţilor succesive ale numĕrului constant *a* numit *basă*. Asa dar putem ḑice cą *logaritmii numerilor intr'o sistemă a-căreea basă estè a sunt esponenţii potenţilor la care trebue redicată basa a pentru a forma aceste numere.*

Astfeliu dacă insemnămu prin *y* un numĕr postiv orcare şi prin x esponentul potenţei la care trebuie a redica basa a pentru a forma acest numer, vom avè.

$$y=a^x.$$

de unde, după definiţiunea precedentă, vom deduce. relaţiunea

$$x=\lg y.$$

178 ***Proprietăţile logaritmilor. Teorema I.*** *Logaritmul productului al mai multor factori este ecuale cu suma logaritmilor factorilor sei.*

Considerăm mai ăntăiu productul al duoi factori AB. Dic că vom avè:

$$\lg AB=\lg A+\lg B.$$

Pentru a demonstrà aceasta, observ că numerile A,B se vor aflà totdeauna, in mod esact sau cu o aprocsimaţiune or-cât de mare vom voì, între terminii progresiunei geometrice din sistema

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\dot{..}}\cdots\frac{1}{q^3}:\frac{1}{q^2}:\frac{1}{q}:1:q:q^2:\ldots:q^n:\ldots:q^p:\ldots q^m:\ldots:q^{n+p}:\ldots \\ \div\ldots-3r.-2r.-r.0.r.2r\ldots nr\ldots pr\ldots mr\ldots(n+p)r\ldots \end{array}\right\} 8)$$

care ne-a servit a definì logaritmii tuturor numerilor.

Fie $A=q^n$, $B=q^p$; de unde $A.B=q^n.q=q^{np+p}$.

Productul A.B fiind astfeliu representat printr'o potenţă a raţiunei q se va aflà la rândul seu intre terminii progresiunei geometrice din sistema precedentă, şi logaritmul seu va fi terminul corespundetor $(n+p)r$ din progresiunea aritmetică. Vom avè dar

$$lgq^{n+p}=(n+p\ r=nr+pr$$

Sau $$lgA.B=nr+pr \quad (9);$$

ănsă prin definiţiune $nr=lgq^n=lgA$,

$$pr=lgq^p=lgB,$$

de unde relaţiunea (7) va devenì

$$lgA.B=lgA+lgB \quad (10)$$

ceea ce ne arată că *logaritmul productului al duoi factori este ecuale cu suma logaritmilor factorilor sei.* Fie acum productul altrei factori A.B.C. Vom putè scrì.

$$lgA.B.C=lgAB.C$$

in care prin AB representăm pentru un minut productul efectuat al immulţirei lui A cu B. Astfeliu productul al trei factori A.B.C fiind redus la productul al duoi factori

$$AB.\ C$$

vom avè, in virtutea relaţiunei (10)

$$lgA.B\ C=lgAB.C=lgAB+lgC.$$

Substituind acum in membrul din urmă, terminului lgAB espresiunea sa ca logaritm al unui product al duoi factori, ni va resultà relaţiunea

lgA.B.C=lgA+lgB+lgC (11)

care ni arată că *logaritmul productului al trèi factori este ecuale cu suma logaritmilor factorilor sei.*

Să presupunem că aplicănd acest procediu am ajuns a găsì că *logaritmul productului AB.C....H.K compus din* n *factori* este *ecuale cu suma logaritmilor factorilor sei.* adicĕ lgA.B.C...H.K=lgA+lgB+lgC+..+lgH+lgK(12)

Pentru a demonstrà că teorema este generală, va fi suficient a demonstrà, că fiind adevĕrata pentru productul a *n* factori A.B.C... H.K, va fi adevĕrată şi pentru productul A.B.C.....K.L compus din *n*+1 factori.

In adevĕr putem scri

lgA.B.C....H.K.L=lg(ABC...HK).L

Sau lgA.BC....H.K.L=lg(ABC...HK)+lgL;

ănsă prin ipotesă avem

lg(ABC....HK)=lgA+lgB+lgC+...+lgH+lgK.

de unde lgABC..H.K.L=lgA+lgB+..+lgK+lgL (13)

care demonstră generalitatea teoremei, căci in virtutea relaţiunei (11) fiind adevĕrată pentru *un product de trei factori*, vom putè face n=3 in relaţiunea (12); ănsă atunci formula precedentă ni arată că teorema este adevĕrată şi pentru un product de 4 factori. Făcênd pe n=4 in formula (12), formula (13) ni va arĕtá că teorema este adevarată pentru un product de cinci factori, şi aşa mai departe. Teorema este dar generală.

179 **Teorema II.** *Logaritmul unui cuoţient este ecuale cu logaritmul dividendului minus logaritmul divisorului.*

Fie propus cuoţientul $\frac{A}{B}$. Represiutând valoarea acestui cuoţient prin C, vom avè

$$\frac{A}{B}=C,$$

de unde $A=BC$. Luând logaritmii ambilor membri ai acestei ecualităţi, ni va venì

$$\lg A=\lg BC=\lg B+\lg C;$$

de unde $\lg C=\lg A-\lg B$

sau $\lg\frac{A}{B}=\lg A-\lg B,$

ceea ce erà de demonstrat.

180. *Nota.* Teorema II se poate demonstrà direct ca şi teorema I. In adevĕr punĕnd

$$A=q^n$$
$$B=q^p$$

vom avè $\lg A=nr$, $\lg B=pr$ şi $\frac{A}{B}=\frac{q^n}{q^p}=q^{n-p}$.

de unde $\lg\frac{A}{B}=\lg q^{n-p}=(n-p)r$

sau $\lg\frac{A}{B}=nr-pr=\lg A-\lg B$

181. ***Teorema III.*** ***Logaritmul potenţei unui numĕr este ecuale cu esponentul potenţei immulţit cu logaritmul numerului.***

Fie dată potenţa A^m. Observăm că putem scri:

$$A^m=A.A.A......A;$$

de unde in virtutea teoremei I vom avè:

$$\lg A^m = \lg A + \lg A + \lg A ... + \lg A,$$

sau $\lg A^m = m \lg A$, ceea ce era de aretat.

182. ***Teorema IV.*** ***Logaritmul rădăcinei unui numèr este ecuale cu logaritmul numèrului impărţit prin indiciul rădăcinei.***

Fie propusă rădăcina $\sqrt[m]{A}$. Representând prin B valoarea acestei redăcini, vom avé:

$$\sqrt[m]{A} = B,$$

de unde $A = B^m$.

Luând logaritmii ambilor membri ai acestei ecualităţi ni va veni:

$$\lg A = m \lg B,$$

de unde $\lg B = \frac{\lg A}{m}$

sau $\sqrt[m]{A} = \frac{\lg A,}{m}$

ceea ce voiam a demonstrà.

183. Prin aceste proprietăţi fundamentale logaritmii sunt in general, foarte utili in efectuarea calculelor numerice de cari depinde determinarea unei mărimi căutate. Pentru a concepe aceasta să ne imaginăm o tabelă cu duoe coloane verticale dintre cari una să cuprindă numerile şi ceialaltă logaritmii lor. Cu ajutorul unei asemene tabele vom putè simplifica, in modul următoriu,

efectuarea operaţiunilor aritmetice cerute pentru determinarea valoarei numerice a unei cuantităţi or-care.

Num.	*L.og*
0,00	$-\infty$
0,01	$-0,000$
0,02	. . . . .
. . .	
. . .	
. . .	
1,00	0,000
1,01	. . . . . .
1,02	. . . . . .
. . .	. . . . . .
. . .	. . . . . .
. . .	. . . . . .
2,00	. . . . . .
2,01	. . . . . .

Esemple. 1⁰. Fie espresiunea cuantităţei căutate de forma

$$x=a.b.$$

Pentru determinarea valoarei lui x va fi de ajuns a căuta, in coloana Log., logaritmii numerilor *a* si *b* şi a face suma acestora. Resultatul acestei adiţiuni fiind in virtutea *toremei I* logaritmul cuantităţei x, se va afla in coloana Log, care presupunem că conţine toţi logaritmii posibili Numĕrul din coloana Num, care va corespunde acestui din urmă logaritmu va fi valòrea numerică căutată a necunoscutei *x*.

Prin urmare in determinarea valoarăi numerice a cuantităţei *x operaţiunea immulţirei numerului* **a** *prin* **b** *va fi, cu ajutorul logaritmilor, inlocuită printr'o adiţiune*

2⁰. Fie propus a calcula valoarea numerică a unei espresiuni de forma.

$$x=\frac{a}{b}.$$

Vom luà in coloana Log. logaritmii numerilor a, b; şi din ăntĕiul vom scădè pre al duoilea. Resultatul acestei scăderi va fi, in virtutea *teoremei II* logaritmul cuantităţei x. Il vom afla dar in coloana *Log.*, şi numĕrul corespundetoriu din coloana *Num.* va fi valoarea numerică a cuantităţei *x* Aşa dar in determinarea lui *x operaţiunea divisiunei numĕrului a prin b, va fi, cu ajutorul logaritmilor, inlocuîtă printr'o sustracţiune,*

3⁰. Fie acum

$$x=a^m.$$

Luănd in coloana *Log.* logaritmul numĕrului a şi immulţindu-l prin *m* vom căpăta după *teorema III* logaritmul potenţei a m^a a lui a adicĕ logaritmul lui *x*. Numĕrul din coloana *Num.* care côrespunde acestui din urmă logaritm va fi valoarea numericĕ a lui *x*. Vedem că in acest cas pentru determinarea cuantităţei *x*, *operaţiunea redicărei la potenţa cuprinsă in espresiunea a , este, prin propietatea logaritmilor, inlocuită printr'o simplă immulţire.*

4^0. Fie in fine propus a calcula o espresiune de forma

$$x=\sqrt[m]{a}$$

In coloana *Log.* vom găsi logaritmul numerului *a* pre care impărţindul prin indiciul m al rădăcinei vom căpăta in virtutea *teoremei IV* logaritmul lui *x*. Numĕrul din coloana *Num.* care va corespunde la acest din urmă logaritm va fi valoarea numerică a cuantităţei *x*. *Vedem astfel că pentru determinarea lui x operaţiunea estragerri de rădăcina, cerută a se efectua asupra numĕrului a, e-te prin proprietatea logaritmilor (teoremă IV), inlocuită printr'o simplă divisiune.*

184. ***Logaritmii vulgari sau decimalî.*** Propietăţile logaritmilor cuprinse in teoremele precedente sunt comune tutulor sistemelor de logaritmi, şi din esemplele generale ce am considerat mai sus, putem a ni face o idee despre importanţa unei table de logaritmi or-cari, pentru esecuţiunea calculelor practice. Pintre diferitele sisteme ănsă, cari se pot imagina in numĕr infinit, sistema logaritmilor cu basa *dece* numiţi *logaritmii vulgari sau decimali* (*), are proprietăţi particulare, cari presintă avantage preţioase

(*) *Logaritmii vulgari se mai numesc şi* **Logaritmii lui Briggs** *de pe numele matematicului ingles ca e a construit cel ănteiu o tablă de logaritmi in această sistemă,* (1624).

in aplicaţiunile numerice. Această sistemă de logaritmi este definită prin sistema progresiunilor următoare:

$$\left.\begin{array}{l} \div\!\div 1:10:10^2:10^3:10^4:\ldots\ldots \\ \div\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ \ldots \end{array}\right\}[f],$$

sau intr'un mod mai general prin:

$$\left.\begin{array}{l} \div\!\div \ldots 0{,}001:0{,}01:0{,}1:1:10:100:1000:\ldots \\ \div \ldots\ldots -3.-2.-1{,}0\ 1.\ 2.\ 3\ldots \end{array}\right\}(g).$$

Putem concepe uşor posibilitatea construcţiunei unei table de logaritmi in această sistemă. Pentru aceasta este de ajuns a presupune că am efectuat un şir de inserţiuni succesive, de căte un singur meḑiu, intre terminii consecutivi ai progresiunilor sistemei (f. Această operaţiune care este tot-deauna posibilă, căci pentru progresiunea geometrică depinde de o simplă estragere de rădăcină patrată, iar pentru cea aritmetică de o divisiune prin 2, va avè de *resultat* de a introduce un numĕr considerabil de meḑii intre terminii primitivi

1 şi 10; 10 şi 100; 100 şi 1000, &&

ai progresiunei geometrice şi

o şi 1; 1 şi 2; 2 şi 3, &

ai progresiunei aritmetice Atunci diferinţa intre duoi termini consecutivi, in aceste progresiuni, putĕnd fi or căt de mică vom voi, meḑii geometrici inseraţi vor representa toate gradele de mărime cuprinse intre 1 şi 10; 10 şi 100 & &; prin urmare numerile intregi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 . . se vor afla reproduse prin aceşti meḑii cu o aprocsimaţiune or căt de mare vom voi. Dacă acestor valori foarte apropiete ale numerilor intregi 2, 3, 4 &, substituim numerle intregi inseşi şi le punem intr'o coloană in ordinea lor naturală, şi in faţa lor inscriem intr'altă coloană meḑii aritmetici corespunḑĕtori la valorile foarte aprocsimative ale acestor numere, atunci ni vom face o idee despre *construcţiunea unei table de logarmi in sistema ce considerăm.*

185. ***Proprietățile logaritmilor vulgari.*** Proprietățile particulare ale acestor logaritmi se deduc fără greutate din simpla inspecțiune a progresiunilor (f) sau (g).

1⁰. *Logaritmul unei potenți or-care a lui 10 este ecuale cu esponentul acestei potenți.*

Progresiunile (f) ni arată in adevěr că logaritmul lui 10^2 sau 100 este 2; a lui 10^3 sau 1000 este 3; a lui 10^4 sau 10000 este 4 și așa mai departe. Aceasta mai resultă in mod general și din teorema III cari ni dă

$$\lg 10^m = m \lg 10;$$

ănsă in sistema ce considerăm, logaritmul lui 10 este ecuale cu unitatea, prin urmare vom avè

$$\lg 10^m = m,$$

ceea ce erâ de aretat.

Nota. Logaritmii potenților perfecte a le basei 10 fiind numere intregi 1, 2, 3, & logaritmii numerilor cuprinse intre duoe potențe consecutive a le acestui numěr, vor fi cuprinși intre duoe numere intregi cari difer intre ele cu o unitate, prin urmare toți acești logaritmi intermediari se vor compune dintr'o *parte intreagă* și o *fracțiune decimală*. Partea intreagă a logaritmului poartă numele de *caracteristică* iar fracțiunea decimală acela de *mantisă*.

2⁰. *Caracteristica positivă a logaritmului unui numèr intreg este ecuale cu atătea unități câte cifre are numèrul mai puțin una.*

Această proprietate o deducem asemene din progresiunile (f) in cari observăm că logaritmii numerilor intregi cuprinse intre 1 și 10 cari sunt compuse dintr'o singură cifră, au *caracteristica zero*, că logaritmii numerilor cuprinse intre 10 și 10^2 sau 100 cari sunt com-

puse din duoe cifre, au drept *caracteristică 1* adicĕ cu o unitate mai puţin de căt numerul cifrelor; că logaritmii numerilor cuprinse intre 10^2 şi 10^3 sau intre 100 şi 1000 cari sunt compuse din trei cifre au drept caracteristică 2, şi aşa mai departe. In general un numer intreg cuprins intre 10^n şi 10^{n+1} este compus din n+1 cifre, logaritmul seu fiind cuprins intre n şi n+1 are drept caracteristică *n* adicĕ cu o unitate mai puţin de căt numerul cifrelor din cari se cumpune numerul insuş.

3⁰. ***Caracteristica negativă a logaritmului unei frácţiuni decimale este ecualĕ in valoarea sa absolută cu numerul ordinal al locului ce ocupă cea ăntĕi cifră insĕmnătoare după virgulă.***

Inspecţiunea sistemei (g) pune in evidenţă şi această proprietate a logaritmilor decimali. In adevĕr vedem că pentru fracţiunea decimală o, 1 *caracteristica negativă* este—1; pentru 0,01 caracteristica negativă este —2; pentru 0,001 caracteristica ste —3; şi în general vedem că pentru fracţiunea decimală

$$0,0000...1=\frac{1}{10^n}=10^{-n}$$

caracteristica negativă va fi—n; căci pentru a cresce fracţiunea $\frac{1}{10_n}$ la unitate a căreia logaritm este zero, va trebui a o immulţi cu 10^n ceia ce cresce logaritmu fracţiunei $\frac{1}{10'}$ cu n. unităţi, ănsă resultatul acestei cresceri, am observat că este zero; urmează dar ca logaritmul propriu al acestei fracţiuni să fie—*n*, ceea ce eră de aretat.

4⁰. *Când immulţim sau impărţim un numĕr printr'o*

potență a lui 10, mantisa logaritmului acestui numĕr nu se schimbă; caracteristica singură se măresce sau se micsurează cu un numĕr de unităţi ecuale cu esponentul acestei potenţi.

Fie $lga = c, \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$

in care prin c insemnănd caracteristica şi prin $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ cifrele mantisei pre care o presupunem calculată cu cinci decimale. Immulţind numerul a printr'o potenţă m a basei 10, vom avè;

$$lg10^m.a = m + lga = m + c, \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$$

care ni arată că valoarea caracteristecei va fi crescută cu *m* unităţi;

Asemene impărţind numĕrul *a* prin potenţa 10^m ni va veni

$$lg\frac{a}{10^m} = lga - m = c, \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon - m$$

sau $$lg\frac{a}{10^m} = (c - m), \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$$

in care vedem că valoarea caracteristicei c este micşurată cu *m* unităţei.

176. ***Usul tablelor de logaritmi.*** In aplicaţiunea logaritmilor la efectuarea calculelor numerice se presintă duoe cuestiuni pricipale cari se resolv cu ajutorul tablelor. Aceste cuestiuni sunt:

1⁰. A găsi logaritmul unui numĕr dat:

2⁰. A găsi numĕrul corespundetoriu la un logatim dat.

Presupunem că tablele de care dispunem sunt *tablele mici* ale *lui Lalande* modificate de *Dupuis* cari conţin logaritmii cu 5 decimale ai numerilor cuprinse intre 1 şi 10,000.

Pentru a facilità esplicarea resolvirei cuestiunilor 1⁰ şi 2⁰, transcrim aice o pagină din aceste table.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Dif.	
310	49136	150	164	178	192	206	220	234	248	262		14
1	276	290	304	318	332	346	360	374	388	402	1	1,4
2	415	429	443	457	471	485	499	513	527	541	2	2,8
3	554	568	582	596	610	624	638	651	665	679	3	4,2
4	653	707	721	734	748	762	776	790	803	817	4	5,6
5	831	845	859	872	886	900	914	927	941	955	5	7,0
6	969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*479	*092	6	8,4
7	50106	120	133	147	161	174	188	202	215	229	7	9,8
8	243	256	270	284	297	311	325	338	352	365	8	11,2
9	379	393	406	420	433	447	*461	474	488	501	9	12,6
320	515	529	542	556	569	583	596	610	623	637		13
1	651	664	678	691	705	718	732	745	759	772	1	1,3
2	786	799	813	826	840	853	866	880	893	907	2	2,6
3	920	934	947	961	974	987	*001	*014	*028	*041	3	3,9
4	51055	068	081	095	108	121	135	148	162	175	4	5,2
5	188	202	215	228	242	255	268	228	295	308	5	6,5
6	322	335	348	362	375	388	402	415	428	441	6	7,8
7	455	468	481	495	508	521	534	548	561	574	7	9,1
8	587	601	614	627	640	654	667	680	693	706	8	10,4
9	720	733	746	759	772	786	799	812	825	838	9	11,7
330	851	865	878	891	904	917	930	943	957	970		12
1	983	996	*009	*022	*035	*048	*061	*075	*088	*101	1	1,2
2	52114	127	140	153	166	179	192	205	218	231	2	2,4
3	244	257	270	284	297	310	323	336	349	362	3	3,6
4	375	388	401	414	427	440	453	466	479	492	4	4,8
5	504	517	530	543	556	569	582	595	608	621	5	6,0
6	634	647	660	673	686	699	711	724	737	750	6	7,2
7	763	776	789	802	815	827	840	853	866	879	7	8,4
8	892	905	917	930	943	956	969	982	994	*007	8	9,6
9	53020	033	046	058	071	084	097	110	122	135	9	10,8
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		

Nota. In construcţiunea acestor table s'a făcut pentru mai multă simplificare, abstracţiune de caracteristica logaritmilor care se determină tot-deauna direct după regula

simplă cunoscută, şi s'a inscris pentru fie-care numĕr, numai *mantisa* logaritmului seu. Această observare trebuie a o avè in vedere in aplicaţiuni.

187. Partea ănteia a acestor table, intitulată *tabla I*, conţine logaritmii numerilor de la 1 la 1000 cu restricţiunea precedentă. Fie-care pagină este impărţită in 11 coloane verticale dintre care ăntĕia insemnată N, cuprinde numerile de la 1 la 100. A duoa coloană insemnată O conţine logaritmii numerilor din căte duoe cifre inscrise in coloana N. Fiind ănsă că immulţirea unui numĕr prin *ḑece* nu schimbă mantisa logaritmului acestui numĕr, atunci coloana insemnată O videm că ni va dà in acelaş timp logaritmii numerilor din coloana N urmate de un zero. Coloanele următoare insemnate sus şi jos *1,2.3*, . . . 9 conţin logaritmii numerilor din coloana N urmate respectiv de cifrele 1,2,3, . . . 9, adicĕ ai numerilor compuse din trei cifre.

Partea a duoa intitulată *tabla II*, din care este estras tabloul alăturat, conţine logaritmii numerilor de la 1000 la 10,000. Fie-care pagină este impărţită in 12 coloane verticale. Anteia coloană insemnată N conţine numerile de la 100 la 999. A duoa coloană insemnată O conţine atăt logaritmii numerilor de trei cifre inscrise in coloana N căt şi ai acestor numere cănd sunt urmate de un zero. Astfeliu 49136 inscris in ăntĕia linie din coloana *O* este atăt mantisa logaritmului numĕrului corespunḑetoriu 310 din coloana N căt şi a numerului 3100 de ḑece ori mai mare de căt acesta. Insemnănd in general prin M.lg mantisa logaritmului unui numĕr, vom putè scri in casul de faţă:

$$0{,}49136 = \text{M.lg}310 = \text{M.lg}3100.$$

Pentru simplificarea construcţiunei tablelor şi inlesnirea usului lor, atăt in coloana *N* căt şi in coloana *O* s'a inscris o singură dată cele dintĕiu duoĕ cifre comune

respectiv la mai multe numere sau la mai mulți logaritmi. Astfeliu in coloana N s'a inscris:

	310		310
	1		311
	2	in loc de	312
	3		313
	4		314
	.		...
	.		...
	.		...
și in coloana O	49136		49136
	276		49276
	415	in loc de	49415
	554		49554
	693		49693
	...		.....
	...		.....
	...		.....

Celelalte coloane insemnate 1, 2, 3 ... 9, cuprindu cele trei decimale din urmă a le logaritmilor numerilor din coloana N urmate respectiv de cifrele 1, 2, 3. . . . . 9; cele dintĕiu duoĕ decimale sunt inscrise in coloana o. Astfeliu pentru mantisa logaritmului numerului 3101 spre esemplu, vom ceti in colona o cele d'intĕiu duoĕ decimale 49 și cele trei decimale din urmă 150 in coloana 1, vom scrie dar:

$$M.lg3101=0,49150\ ;$$

vom avè asemene $M.lg3102=0,49164$

$$M.lg3117=0,49374\ :\&\&.$$

Logaritmii completi ai acestor numere vor fi, după regula relativă la determinarea caracteristicei,

lg 310=2,49136
lg3100=3,49136
lg3101=3,49150
lg3102=3,49164
lg3117=3,49374.

N*ota*. In luarea celor de'ntĕiu duoĕ decimale din coloana O este de observat casul când cele trei de pe urmă cifre din coloanele următoare sunt insemnate cu o steluţă. Atunci cele duoĕ decimale de la inceput cari se refer la acestea sunt inscrise in linia imediat următoare. Vom avè astfeliu pentru numerele 3164, 3236, 3315:

M.lg3164=0,50024
M.lg3236=0,51001
M.lg3315=0,52048.

Logaritmii completi ai acestor numere vor fi :

lg3164=3,50024
lg3236=3,51001
lg3315=3,52048.

In fine coloana din urmă insemnată *Dif.* conţine diferinţele ce găsim intre duoi logaritmi consecutivi in trecere de la o coloană la următoarea. Aceste diferinţi cărora li se dă numirea de *diferinţi tabulare,* sunt dar crescerile ce primesc logaritmii numerilor de 4 cifre când aceste numere inseşi cresc cu o unitate.

Pentru fie-care din aceste diferinţi comune la mai mulţi logaritmi consecutivi urmează de desubt duoe mici coloane despărţite printr'o linie verticală. Dintre acestea una

conține in ordine naturală numerile 1, 2. 3.... 9 cari representă prin abreviare fracțiunile $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10} \ldots \frac{9}{10}$, cea-laltă conține productele acestor fracțiuni prin diferința tabulară respectivă, cărora li se dă numele de *părți proporționale*. Astfeliu in tabelul alăturat subt diferința 14 de esemplu vedem scris in mod corespundetoriu:

1 și 1,4 adică productul $14.\frac{1}{10}=1,4$

2 și 2, 8 . . . . . $14\frac{2}{10}=2,8$.&&,

188. Trecem acum la resolvirea celor duoă probleme principale cari se presintă in or-ce calcule efectuate prin logaritmi.

189. ***Problema I.*** ***Un numĕr or-care fiind dat, a găsi logaritmul seu cu ajutorul tablelor.***

Distingem duoĕ casuri, după cum numĕrul propus este mai mic sau mai mare de cât limita tablelor de cari ne servim. I⁰. In casul ăntĕiu numĕrul poate fi *intreg*, *decimal* sau o *fracțiune decimală*.

1⁰. Fie cerut a găsi logaritmul numĕrului de trei cifre 389. Acest numĕr fiind cuprins intre 1 și 1000. căutăm in partea ăntĕia a tablelor unde găsim (pag. 2:) coloana N numĕrul 38. Inaintăndu-ne orizontal până la coloana 9 aflăm 8995 cari sunt cele patru decimale din urmă ale mantisei logaritmului căutat. Pentru ăntĕia decimală găsim cifra 5 in coloana *O*. Astfeliu avem:

$$\lg 389 = 2,58995.$$

Nota. Logaritmul acestui numĕr se află asemene in partea a IIᵃ a tabelor *pagina* 15. Avantagiul ănsă ce a-

vem de a ne servi de partea Iᵃ pentru numerile compuse din trei cifre, este că in loc de 30 avem de căutat numai in 4 pagine.

Fie acum un număr cuprins intre 1000 și 10000, spre esemplu numĕrul 8916.

Pentru a găsi logaritmul acestui numĕr facem abstracțiune de cifra din urmă și căutăm numĕrul 891 pe care'l aflăm in *tabla II*, pagina 32, coloana N. Ne inaintăm apoi orizontal in linia ecestui numĕr pănă la coloana 6 in care găsim *017. Antĕia cifră la stănga fiind insemnată cu o steluță, suntem preveniți că cele d'intĕiu duoĕ decimale a le mantisei logaritmului căutat se află in coloana *0* in linia imediat următoare. Avem in acest mod:

$$\lg 8916 = 3,95017.$$

2⁰ Numerul propus este un *numĕr decimal.* Fie spre esemplu de găsit logaritmul numerului 32,19. Partea intreagă a acestui numĕr fiind compusă din duoe cifre, caracteristica logaritmului seu va fi **1**. Pentru determinarea mantisei avem relațiunea cunoscută care ni dă:

$$M.\lg 32,19 = M.\lg 3219;$$

de unde $\lg 32,19 = 1 + M.\lg 3219.$ (α)

In tabelul precedent aflăm:

$$M.\lg 32,19 = 0,50772,$$

prin urmare vom avè:

$$\lg 22,19 = 1,50772.$$

Generalisănd relațiunea (α) putem formulà regula următoare: ***Logaritmul unui numĕr decimal se formează adăugĕnd mantisa logaritmului acestui numĕr, considerat ca intreg, la caracteristica relativă la partea sa intreagă.***

Vom avè astfeliu:

$$\lg 3,219 = 0,50772$$

3⁰. Fie propus a găsi logaritmul unei fracțiuni decimale. Acest cas se poate totdeauna reduce la precedentul

immulţind fracţiunea printr'o potenţă a lui 10. Immulţirea ănsă a unui numĕr or-care printr'o potenţă a lui 10 măresce caracteristica logaritmului cu numĕrul de unităţi cuprins in esponentul acestei potenţi. Prin urmare *pentru a forma cu ajutorul tablelor logaritmul unĕi fracţiuni decimale, va fi de ajuns a o immulţi printr'o potenţă suficientă a lui 10, spre a o transforma intr'un numĕr decimale cu o cifră la partea sa intreagă, şi a scăde din resultat gradul potenţei respective a lui dece.*

Vom avè astfeliu:

$$\lg 0{,}3219 = \lg 3{,}219 + \bar{1};$$

in care $\bar{1}$ este esponentul scădut al potenţei ăntĕia a lui 10 cu care am immulţit fracţiunea 0,3219 pentru a o transformà in numĕrul decimal 3,219. Substituind lui lg3,219 valoarea o,50772; căpătăm:

$$\lg 0{,}3219 = \bar{1}{,}50772. \qquad (\alpha')$$

Vom avè asemene:

$$\lg 0{,}03319 = \lg 3{,}219 + \bar{2} = \bar{2}{,}50772; \quad (\alpha'')$$

$$\lg 0{,}003212 = \lg 3{,}219 + \bar{3} = \bar{3}{,}50772 \quad (\alpha''')$$

Esaminănd in ecualităţile (α'), (α'') (α''') modul formărei logaritmilor fracţiunilor 0,3219 0,03219, 0,003219, putem enunţa următoarea regulă:

Logaritmul unĕi fracţiuni decimale se formează adăugĕnd cătră caracteristica sa negativă (ecuale cu numĕrul ordinal al locului ce ocupă cea ăntĕiu cifră semnificativă după virgulă), mantisa logaritmului numĕrului ce căpătăm când facem abstracţiune de virgula fracţiunei.

Trecem acum la al duoilea cas cănd numĕrul propus este mai mare de căt limita tablelor. Fie, spre esemplu, de găsit logaritmul numĕrului 32857. Acest

numĕr fiind mai mare de căt 10000 care formează limita tablelor lui Lalande, il vom reduce la această limită impărţindu-l prin ăntĕia potenţă a lui 10. Vom putè scri :

$$\lg 32857 = \lg 3285{,}7 + 1 = 4 + M.\lg 3285{,}7,$$

in care numĕrul ḑecimal 3285,7 fiind cuprins intre numerile intregi consecutive 3285 şi 3286 logaritmul seu se va aflà insuş cuprins intre logaritmii acestor uumere. Luăm mai ăntĕiu in table logaritmul numĕrului 3285 care este imediat mai mic de căt 3285,7. Găsim :

$$M.\lg 3285 = 0{,}51654.$$

Ansă M.lg3285,7 va fi invederat ecuale cu M. lg3285 plus o creseere necunoscută corespunḑetoare la crescerea in numĕr de 0,7. Pentru determinarea acesteia admitem propoziţiunea următoare : *Crescerile mici ale logaritmului sunt proporţionalĕ cu crescerile corespunḑetoare ale numĕrului.* (*). *Aceasta ni duce la proporţiunèa*:

$$\frac{x}{\Delta} = \frac{0{,}7}{1},$$

sau

$$x = 0{,}7 \times \Delta,$$

in care Δ represintă in mod general diferinţa tabulară relativă la logaritmii consecutivi intre cari este cuprins logaritmul căutat. Această diferinţă nu é altă de căt crescerea ce primesce logaritmul unui numĕr când acesta cresce cu o unitate. In ecsemplul de faţă avem :

$\Delta = \lg 3286 - \lg 3285 = 13$ unităţi de ordinea a 5^{ea} ḑecimală ;

pri urmare $x = 13 \times 0{,}7 = 9{,}1.$

(*) *Această proporţionalitate intre crescerile logaritmului şi acele ale numĕrului este numai aprocsmativă. Ea se basază pe o proprietate generală a funcţiunilor continue, cuprinsă in formula*

$$f(x+h) - f(x) = A.h,$$

care esistă in mod foarte aprocsimativ, cănd crescèrea **h** *este foarte mică, şi a căreia demonstraţiune se dă de ordinariu in teoria funcţiunilor derivate sau in calculul diferenţial.*

Dănd calculului dispoziţiunea ordinară vom avè:

$$\begin{array}{r} \lg 3285 = 3,51654 \\ 0,7 \,\ldots\ldots\, 9,1 \\ \hline \lg 3285,7 = 3,51663, \end{array}$$

de unde $\lg 32857 = 4,51663.$

Fie ăncă propus a găsi logaritmul numĕrului 335897. Pentru a reduce acest numĕr la limita tablelor, il vom impărţi prin potenţa a 2ᵃ a lui 10, ceia ce ni va dà:

$$\lg 335897 = 5 + M.\lg 3358,97. \quad (\beta)$$

Pentru a forma M.lg3358,97 va trebui cătră M lg3358 a adăugi crescerea in logaritm x corespunḑetoare la 0,97 crescere in numĕr.

Avem proporţiunea

$$\frac{x}{\Delta} = \frac{0,97}{1}$$

sau $x = 0,97.\Delta,$

ănsă $\Delta = \lg 3359 - \lg 3358 = 13$ unităţi de ordinea a 5ᵃ; prin urmare

$$x = 0,97 \times 13 = 2,61.$$

Această valoare a crescerei x, se poate determina uşor cu ajutorul micilor table din coloana *Dif.* In adevĕr pentru crescerea in numĕr de:

0,9 găsim 11,7 crescere in logaritm,
şi pentru 0,07 0,91
de unde x=12,61 sau 13

resultat identic cu cel precedent dedus din intrebuinţarea directă a proporţiunei. Pentru determinarea definitivă a logaritmului cerut, vom puté aşeḑia calculul in modul următoriu:

$$\begin{array}{r} M\lg 3358 = 0,52608 \\ 0,97 \,\ldots\, 13 \\ \hline M.\lg 3358,97 = 0,52621; \end{array}$$

de unde in virtutea formulei (β) vom avé:

$$lg335897=5,52621.$$

Aşa dar *spre a formà logaritmul unui numĕr mai mare de căt limita tablelor il impărţim printr'o potenţă a lui ḑece spre a'l reduce la un numĕr maĭ mic de căt această limită; determinăm mantisa logaritmului acestui din urmă numĕr, şi-i adăugim apoi caracteristica după regula cunoscută.*

190. **Problema II.** *Fiind dat un logaritm, a găsi cu ajutorul tablelor numĕrul care-i corespunde.*

Cănd logaritmul dat se află in table determinarea numĕrului nu presintă nici o dificultate, căci totul se reduce la cetirea simplă a unui numĕr corespunḑetoriu la un logaritm inscris in table. Astfeliu pentru logaritmul 3,51996 găsim in tabelul alăturat numĕrul 3311.

Nota I. Insemnănd prin x numĕrul căutat, ecuaţiunea problemei va consiste in acest cas in relaţiunea

$$lgx=3,51996,$$

şi soluţiunea sa va fi:

$$x=3311.$$

Nota II. Cănd caracteristica logaritmului dat este mai mare de căt 3, ceea ce ni arată că partea intreagă a numĕrului conţine mai mult de căt patru cifre, atunci numĕrul de cifre, cerut de valoarea caracteristicei, se complectează adăugind, unul sau mai mulţi zero, la dreapta numĕrului inscris in table.

Esemplu. Fie dat

$$lgx=5,51996.$$

Caracteristica 5 ni arată că partea intreagă a numĕrului se compune din 6 cifre. Numĕrul ănsă din table care

corespunde la mantisa 0,51996 este 3311; prin urmare numĕrul x va fi:

$$x=331100.$$

Fie acum propus a găsí numĕrul care corespunde la un logaritm care nu se află in table.

In acest cas procedem in modul următoriu. Luăm din table cel mai mare logaritm care se cuprinde in logaritmul dat. Numĕrul corespundetoriu acestuia este cel mai mare numĕr din table care se cuprinde in numĕrul căutat. Pentru a determina pe acest din urmă va fi de ajuns a determinà diferinţa sa h in raportu către cel de'ntăiu, adicĕ către numĕrul din table imediat inferior. Aceasta se face cu ajutorul proporţiunei,

$$\frac{\delta}{\Delta}=\frac{h}{1},$$

in care δ represintă diferinţa logaritmului dat in raport către cel mai mare logaritm din table care se cuprinde in acesta, Δ diferinţa tabularĕ şi h diferinţa in numĕr corespundetoare la diferinţa δ.

Esemplu I. *A află numĕrul al cărui logaritm este 4,49918.*

Insemnănd prin x numĕrul căutat, vom ave relaţiunea

$$\lg x=4,49918$$

Facem abstracţiune de caracteristică şi căutăm in table cea mai mare mantisă care se cuprinde in 0,49918. Găsim in tabel 0,49914 care corespunde la numĕrul 3156, prin urmare numĕrul x se va puté scri:

$$x=3156+h.$$

Pentru determinarea lui *h* avem proporţiunea

$$\frac{h}{1}=\frac{\delta}{\Delta} \quad (\varepsilon),$$

in care $\delta=0{,}49918-0{,}49914=4$ şi $\Delta=13$ unităţi de ordinea a 5ª decimală ; vom avè dar

$$h=\frac{4}{13}=0{,}3,$$ oprindu-ne la decimĭ de unitate, de unde numerul căutat va fi, din causa caracteristicei 4,

$$x=31563.$$

Nota. I. In conversiunea cuoţientului $\frac{\delta}{\Delta}$ in decimale trebuie a ne opri la cea întêie ordine decimală a căreia unitate este $<\frac{1}{\Delta}$ căci se demonstră că eroarea făcută asupra cuoţientului $\frac{\delta}{\Delta}$ este mai mică decât fracţiunea $\frac{1}{\Delta}$

Nota. *II*. Determinarea lui *h* se poate facilità cu ajutorul tablelor mici din coloana *Dif.* in adevĕr in tabelul productelor parţiale relativ la diferinţa tabulară 13 găsim că pentru 3,9 crescere in logaritm, crescerea corespundetoare in numĕr este 0,3, resultat identic cu ceea ce ni a dat divisiunea $\frac{4}{13}$. In practica calculelor se poate admite dispoziţiunea următoare :

$$\lg x=4{,}49918$$
$$\lg 3156=\ ,49914 \ \| \ 3156$$
$$\delta=4$$

pentru $\qquad 3{,}9 \ldots\ldots \quad 0.3$

de unde $\qquad x=31563.$

Nota III. Dacă in loc de caracteristica positivă 4 am fi avut in esemplul precedent caracteristica negativă $\bar{4}$, atunci numĕrul căutat ar fi fost fracţiunea decimală

$$x=0,00031563.$$

Esemplul II. A aflá numĕrul care corespunde la logaritmul negativ —2,49678.

Insemnănd prin x numĕrul căutat vom ave:

$$\lg x=-2,49677.$$

Spre a determina pe x cu ajutorul tablelor, transformăm logaritimul negativ propus, intr'un logaritmu ecuivalent a căruia mantisă să fie positivă şi numai caracteristica negativă. Pentru aceasta scrim:

$$\lg x=-2,49678=-2-1+1-0,49678; \quad \text{(i)}$$

diferinţa 1—0,49678 intre unitate şi mantisa logaritmului negativ propus poartă nume de *complement al mantisei la unitate.* Insemnănd această diferinţă prin notaţiunea C^t, vom ave:

$$C^t.0,49678=1-0,49678=0,50322$$

de unde relaţiunea (i) va devenì:

$$\lg x=\bar{3}+C_t.0,49678=\bar{3},50322.$$

Fecĕnd abstracţiune de caracteristica negativă $\bar{3}$, care scim că ni arată că cea antăi cifră semnificativă a valoarei lui *x* ocupă al treilea loc după virgulă, şi căutănd in table numĕrul care corespunde la mantisa positivă 0,50322 vom avè:

$$\lg x=\bar{3},50322$$

$$\lg 3185= \quad 50311 \quad \| \quad 3185$$

$$\delta= \dots\ 11$$

pentru 9,8 avem 0,7

. . . , 1,1 0,08

de unde $x=0,00318578$

Nota I. Transformarea relativă la logaritmii negativi este foarte usitată in calculele cu logaritmi. Regula generală a acestei operațiuni este următoarea: *Un logaritm negativ se transformă intr'un logaritm cu mantisa positivă și numai cu caracteristica negativă, dacă mărim cu o unitate valoarea absolută a caracteristicei conservănd resultatului semnul minus și inlocuind mantisa prin complementul seu la unitate.*

Nota II. Complimentul la unitate al mantisei unui logaritm negativ se formează ușor, *luănd pentru fie-care cifră, de la stănga la dreapta, complementul seu la 9 afară de cea de pe urmă cifră insemnătoare acăreea complement se iè la 10.*

191. ***Aplicațiuni.*** 1°. *A calculà valoarea numerică a productului.*

$$x=5945,39\times 0,0349$$

Avem in virtutea *teoremei I*

$$\lg x=\lg 5945,39+\lg 0,0349$$

Luănd in table mantisele acestor logaritmi și determinănd caracteristicile direct, după regula cunoscută vom avè:

$$\lg 5945,00=3,77415$$
$$0,39 \quad \ldots\ldots 3$$
$$\lg 5945,39=3,77418$$
$$\lg 0,0349=\bar{2},54283$$
$$\lg x=2,31701$$
$$\lg 2074=\ 31681 \quad \| \ 2074$$
$$\delta=\ldots 20 \ \ldots\ldots 0,9$$
$$x=207,49.$$

2°. *A calcula valoarea numerică a espresiunei fracționare*

$$x=\frac{35997.0,01856}{324}$$

Aplicănd logaritmii avem :

$$\lg x = \lg 35997 + \lg 0,01856 - \lg 324,$$

lg 3599,0=4,55618

0,7 8,4

lg 35997=4,55626

lg0,01856=$\bar{2}$,26858

—lg324 (*) = 3,48945

lgx=0,31429

x=2,062.

3⁰. A calcula valoarea numerică a espresiunei iraţionale.

$$x = \frac{\sqrt[3]{12,854} \,.\, 503}{0,0136}.$$

Avem $\lg x = \frac{1}{3}\lg 12,854 + \lg 503 - \lg 0,0136$;

lg12,850=1,10890

0,4 13

lg12,854=1,10903

$\frac{1}{3}$lg,2854=0,36967

lg503=2,70157

—lg0,0136=1,86646

lgx=4,93770

lg8663= 93767 || 8663

δ= 3 0,6

x=86636.

Aice cifra din urmă nu este sigură din causa micimei diferinţei tabulare intrebuinţate.

(*) *—lg324= 3. 48945 este dedus din logaritmul negativ—2,51055 după regula formulată in* **Nota 1** (*190*). Asemene logaritmul unei fracţiuni decimale preces de semnul minus se va transformà in logaritm positiv in modul următoriu :
esampl.—lg0,0136=—($\bar{2}$, 13354)=2—0,13354=1,86646.

4⁰. *A calcula valoarea numerică a espresiunei*

$$x=\frac{391.(8959)^3}{(935)^4}$$

Avem $\lg x=\lg 391+3\lg 8959-4\lg 935$.

$$\lg 391=2,59218$$
$$3\lg 8959=11,85678$$
$$-4\lg 935=\overline{12},11675$$
$$\lg x=2,\ 56571$$
$$\lg 3678=\ \ 56561 \ \| \ 3678$$
$$\delta=\dots 10$$
$$\text{pentru } 9,6 \ \dots\dots 0,8$$
$$x=367,88$$

Nota. Cănd esponenţii potenţilor sunt numere mai mari de căt in esemplul precedent, atunci pentru a avè logaritmii potenţilor cu 5 ḑecimale esacte, este de trebuinţă a avè logaritmii numerilor respective cu un mai mare numĕr de ḑecimale. Pentru acest scop poate servi tabelul VII (pag. 130), care conţine logaritmii cu ḑece cifre ḑecimale ale tuturor numerilor prime cuprinse intre 1 şi 1000.

5⁰. *A calculà espresiunea*

$$x=\frac{2891.0,594}{\sqrt[5]{3485,25}}.$$

Avem $\lg x=\lg 2891+\lg 0.594-\frac{1}{5}\lg 3485,25.$

$$\lg 2891=\dots\dots\dots\dots =3,46105$$
$$\lg 0,594=\dots\dots\dots\dots =\overline{1},77379$$
$$-\frac{1}{5}\lg 3485,25=\frac{1}{5}[\overline{4},45777] =$$
$$\frac{1}{5}(\overline{5},+1,45777)=\overline{1},29155$$
$$\lg x=2,52639$$
$$\lg 3360=,52634 \ \| \ 3360$$
$$\delta=\dots 5 \dots\dots 0,4$$
$$x=336,04.$$

192. ***Ecuațiuni esponențiale.*** Când esponentul unei cuantități a este o necunoscută x, atunci espresiunei corespundetoare a^x i se dă numè de *cuantitatea esponențială* și o ecuațiune care conține asemene cuantități se numesce *ecuațiune esponențială.*

Astfeliu

$$a^x = b \quad (1)$$

este o *ecuațiune esponențială.* Ecuațiunile esponențiale; de această formă se dic *de ordinea ănteia* sau de *gradul ănteiu.* Ele se pot resolvì ușor cu ajutorul logaritmilor.

Esemplu I. *A resolvi ecuațiunea esponențială*

$$12^x = 358.$$

Luănd logaritmii avem:

$$x \lg 12 = \lg 358;$$

de unde

$$x = \frac{\lg 358}{\lg 12} = \frac{2,55388}{1,07918}$$

Luănd din nuou logaritmii ni va veni:

$$\lg x = \lg 2,55388 - \lg 1,07918$$

$$\lg 2,55388 = 0,40720$$

$$-\lg 1,07918 = \bar{1},96698$$

$$\lg x = 0,37418$$

$$\lg 2366 = \ ,37401 \parallel 2366$$

$$\delta = \ldots \ 17 \ldots\ldots 0,9$$

$$x = 2,3669.$$

Esemplul II. *A resolvi ecuațiunea*

$$10^x = 1778,28.$$

Luănd logaritmii avem:

$$x \lg 10 = \lg 1778,28; \qquad \text{ănsă } \lg 10 = 1,$$

prin urmare $x = \lg 1778,28$

sau $x = 3,2\,994$

CARTEA IV.

Despre ecuaţiunile de gradul al duoilea.

193. Dupa definiţiunea generală a gradului ecuaţiunilor, o ecuaţiune de *grdul al doilea* cu o necunoscută x va fi o ecuaţiune in care gradul cel mai inalt al terminilor in privinţa acestei necunoscute va fi *duoi.*

O ecuaţiune de gradul al duoilea in forma sa cea mai generală poate cuprinde trei specii de termini: termini de gradul al duoilea, termini de gradul ăntĕiu in privinţa necunoscutei si termini independenţi de necunoscută. O atare ecuaţiune se va putè scri tot-deauna

$$ax^2+bx+c=0. \quad (1)$$

Subt această formă ecuaţiunea de al duoilea grad se ḑice *complectă*

Cănd unul din terminii din urmă lipsesce, ceea ce se intimplă dacă b sau c este ecuale cu zero, atunci ecuaţiunea de al duoilea grad se ḑice *necomplectă* şi iè una din formele următoare:

$$ax^2+bx=0. \quad (2)$$
$$ax^2+c=0. \quad (3)$$

194 *Resolvirea ecuaţiunei de gradul al duoilea necompletă.* Cănd ecuaţiunea de al duoilea grad are una din formele precedente resolvirea se face foarte uşor.

In adevĕr, considerănd mai ăntĕiu ecuaţiunea

$$ax^2+bx=0$$

observăm că o putem scri:

$$x(ax+b)=0. \quad (4)$$

A resolvì această ecuaţiune este a găsi toate valorile lui x cari fac pe membrul antĕiu identic ecuale cu zero. Ansă in general un product se anulează impreună cu fie-care din factorii sei, prin urmare pentru a găsi valorile lui x cari anulează productul

$$x(ax+b)$$

va trebui a anulà succesiv pre fie-care din factori, ceea ce va dà:

$$x=0$$

$$\text{şi } ax+b=0, \text{ de unde } x=-\frac{b}{a}.$$

Aşa dar esistă duoĕ valori a le necunoscutei x cari verifică ecuaţiunea (4); cu alte cuvinte ecuaţiunea necomplectă

$$x(ax+b)=0 \text{ sau } ax^2+bx=0$$

are *duoĕ rădăcini*: una o şi alta $-\frac{b}{a}$.

Fie acum propus a resolvi ecuaţiunea

$$ax^2+c=0. \quad (3)$$

Trecĕnd terminul cunoscut in al duoilea membru şi impărţind totul prin coeficientul lui x^2, vom avè:

$$x^2=-\frac{c}{a} \quad (5).$$

Aice distingem duoĕ casuri după cum avem

$$1^0 -\frac{c}{a}>0,$$

$$2^0 -\frac{c}{a}<0.$$

I. In antĕiul cas estrăgĕnd rădăcina patrată din ambii membri ai ecuaţiunei (5) ni va veni:

$$x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}. \quad (6)$$

Luăm duplul semn $\pm$ naintea radicalului, căci a resolvi ecuaţiunea (5) este a găsi toate valorile lui x ale căror patrat să fie ecuale cu $-\frac{c}{a}$. Ansă patratul atăt al lui $+\sqrt{-\frac{c}{a}}$ căt şi al lui $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ este ecuale cu cuantitatea $-\frac{c}{a}$ de subt radical. Aşa dar cănd $-\frac{c}{a}>0$ ecuaţiunea

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

are *duoĕ rădăcini ecuale şi dĕ semn contrariu*, una $+\sqrt{-\frac{c}{a}}$ şi alta $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

II. Cănd avem $-\frac{c}{a}<0$, atunci formula (b) ni arată că determinarea necunoscutei x depinde de la o estragere de rĕdăcină imposibilă, căci nu esistă numer al cărui patrat să poată fi ecuale cu o cuantitate negativă. In acest cas $+\sqrt{-\frac{c}{a}}$ şi $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ se ḑic *valori imaginare* ale necunoscutei x.

195. *Nota.* Espresiunile $+\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $-\sqrt{-\frac{c}{a}}$ cari in casul iui $-\frac{c}{a}<0$ n'au nici un inţeles prin sine inseşĭ

căcĭ sunt simbolul unei operaţiuni imposibile, se admit in calcul convenind de a consideră patratul lor ca fiind ecuale cu cuantitatea negativă $-\frac{c}{a}$ de subt radical. Subt această condţiune ele verifică ecuaţiunea (5) şi se numesc *rădăcini imaginare* ale acestei ecuaţiuni.

196. ***Resolvirea ecuaţiunei*** $ax^2+bx+c=0$ Pentru a resolvì ecuaţiunea de al duoilea grad complectă.

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (\delta)$$

căutăm a o reduce la forma ecuaţiunei (5) in care membrul ăntĕiu este un patrat esact.

Impărţind ambii membri ai ecuaţiunei (δ) prin coeficientul *a* al terminului ăntĕiu, avem:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

şi punĕnd pentru abreviare

$$\frac{b}{a}=p, \frac{c}{a}=q$$

ni va venì

$$x^2+px+q=0 \qquad (\varepsilon)$$

sau

$$x^2+px=-q. \qquad (\varepsilon')$$

Pentru a transformă membrul ăntĕiu al acestei ecuaţiuni intr'un patrat esact, considerăm pe x^2+px ca cei d'intĕi doi termini ai patratului unui binom; atunci după mòdul cunoscut al compunerei patratului unui binom or care, x^2 va fi patratul terminului ăntĕiu şi px duplul terminului ăntĕiu prin al duoilea. Ceea ce lipsesce dar sumei x^2+px pentru a devenì un patrat complet, este patratul terminului al duoilea al

binomului respectiv. Insemnănd acest termin prin y va trebuì să avem in mod identic:

$$x^2+px+y^2=(x+y)^2 \qquad (\varepsilon'')$$

sau $$x^2+px+y^2=x^2+2xy+y^2;$$

de unde $$px=2xy$$

sau $$y=\frac{p}{2}.$$

Adiţionănd dar către ambii membri ai ecuaţiunei (ε') cuantitatea $\frac{p^2}{4}$ vom avè:

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q$$

sau $$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q.$$

Estrăgĕnd rădăcina patrată din ambii membri ai acestei ecuaţiuni, ni va venì:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

sau $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}; \qquad (s)$$

de unde vedem că necunoscuta unei ecuaţiuni de al duoilea grad are duoĕ rădăcini una corespunḑetoare la semnul + alta la semnul — inaintea radicalului. Insemnăndu-le prin x′ şi x″ vom avè:

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Formula (s) ni arată *că necunoscuta unei ecuaţiuni*

de al duoilea grad de forma (ε) *este ecuale cu jumĕtatea coeficientului terminului al duoilea luat cu semn contrariu, plus sau minus rădăcina patrată din patratul acestei jumătaţi minus terminul cunoscut.*

197 *Nota I.* Din formula (s) care dă soluţiunile ecuaţiunei (ε) putem deduce uşor formula de resolvire a ecuaţiunei mai generale

$$ax^2+bx+c=0. \qquad (\delta)$$

Pentru aceasta este de ajuns, in formula precedentă, a substitui lui *p* şi *q* valorile lor $\frac{b}{a}$, şi $\frac{c}{a}$. Vom avè:

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

sau
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (t)$$

Aceaată formulă se poate enunţà in modul următoriu *Necunoscuta unei ecuaţiuni de al duoilea grad de forma*

$$ax^2+bx+c=0\ ,$$

este ecuale cu minus coeficientul terminului al duoilea: plus sau minus rădăcina patrată din patratal acestui coeficient, minus de patru ori productul coeficienţilor terminilor estremi si totul impărţit prin duplul coeficientului terminului ăntèiu.

198. *Nota II.* Formula (t) se simplifică cănd coeficientul terminului al duoilea este *un numĕr păreche.*

Fie in adevĕr ecuaţiunea

$$ax^2+2bx+c=0. \qquad (\delta')$$

Aplicăndu-i formula precedentă vom avè:

$$x=\frac{-2b\pm\sqrt{4b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b+\sqrt{4(b^2-ac)}}{2a},$$

sau $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}, \qquad (t')$$

care ni arată *că necunoscuta dintr'o ecuaţiune de al duoilea grad de forma* (δ') *este euale cu minus jumătatea coeficientului terminului al duoilea plus sau minus rădăcina patrată din pătratul acelei jumătăţi, minus productul simplu al coeficienţilor terminilor estremi*) şi totul impărţit prin coeficientul terminului ăntĕiu.*

199. *Aplicaţiuni.* *Esemplul I.* A resolvi ecuaţiunea

$$x^2+5x+6=0$$

aplicănd formula (s) vom avè:

$$x=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}$$

sau $$x=-\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25-24}{4}}=-\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2};$$

de unde $x'=-2$, $x''=-3$.

Esemplul II. Cari sunt rădăcinele ecuaţiunei $3x^2-51x+216=0$?

(*) *Terminul independent se poate considerà cà fiind coeficientu potenţei de gradul zero a necunoscutei x, căci după semnificaţiunea dată cuantităţilor cu esponent zero, putem scrì:*

$$cx_0=c.$$

Formula (t) ni dă:

$$x=\frac{51\pm\sqrt{51^2-12.216}}{6}$$

sau

$$x=\frac{51\pm\sqrt{9}}{6}$$

de unde $x'=\frac{51+\sqrt{9}}{6}=\frac{51+3}{6}=9$

$$x''=\frac{51-\sqrt{9}}{9}=\frac{48}{6}=8.$$

Esemplul III. A resolvi ecuaţiunea

$$x^2-2x-48=0.$$

Formula (t') ni dă:

$$x=1\pm\sqrt{1+48}$$

sau $x=1\pm\sqrt{49}=1\pm7$

de unde $x'=+8,$

$$x''=-6.$$

Discusiunea ecuaţiunei de al duoilea grad.

200. Din cele trei forme

$$x^2+px+q=0$$
$$ax^2+bx+c=0$$
$$ax^2+2bx+c=0$$

subt care se poate presintà o ecuaţiune complectă de al duoilea grad, cea mai generală este

$$ax^2+bx+c=0, \qquad (\alpha)$$

pentru a căreia resolvire am găsit formula

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad (\beta)$$

In discuţiunea acestei formule distingem trei casuri principale după cum

$$1^0\ b^2-4ac>0,$$
$$2^0\ b^2-4ac<0,$$
$$3^0\ b^2-4ac=0.$$

291. In casul antĕiu cuantitatea b^2-4ac de subt ra dical fiind positivă, cele duoe rădăcini ale ecuaţiunei (α)

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

cuprinse in formula (β) se vor determiná esact sau numai cu o aprocsimaţiune or căt de mare vom voi, după cum valoarea lui b^2-4ac va fi, sau nu, un patrat perfect. Remăne dar de esaminat cari vor fi semnele acestor rădăcini, in diferitele combinaţiuni de semne ce pot presintà coeficienţii a, b, c ai ecuaţiunei (α).

Pentru aceasta observăm că putem tot-deauna presupune că coeficientul a al terminului antĕiu este positiv, căci de va fi negativ va fi de ajuns, spre a'l face positiv, a immulţi prin -1 ambii membri ai ecuaţiunei

$$ax^2+bx+c=0.$$

Atunci in această ecuaţiune, nu ne mai remăne de considerat de căt coeficienţii *b*, *c* cari pot presintà duoĕ combinaţiuni principale de semne, după cum semnele or vor fi ecuali sau contrare. Vom avè astfeliu:

$$a>0\left\{\begin{array}{ll} 1_0 & \left\{\begin{array}{ll} b>0 & c>0 \\ b<0 & c<0 \end{array}\right. \\ 2_0 & \left\{\begin{array}{ll} b>0 & c<0 \\ b<0 & c>0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

ceea ce dă in totul patru casuri particulare.

In casul antĕiu b, c fiind positivi, avem invederat $b^2-4ac<b^2$; prin urmare

$$\sqrt{b^2-4ac}<b \text{ de unde } x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<0$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<0$$

In casul al duoilea coeficienţii b, c fiind negativi vom avè:

$$\sqrt{b^2-4ac}>-b; \text{ de unde } x'>0,\ x''<0.$$

In casul al treilea *b* fiind positiv şi *c* negativ este evident că vom avé:

$$\sqrt{b^2-4ac}>b \text{ de unde } x'>0\ x''<0.$$

In casul al patrulea avem $b<0$ şi $c>0$, prin urmare

$$\sqrt{b^2-4ac}<-b \text{ de unde } x'>0, x''>0.$$

Resumănd aceste resultate vom capatà tabelul următoriu:

$$a>0\begin{cases} 1^0\ b>0\ c>0;\ \sqrt{b^2-4ac}<\ \ b;\ x'<0,\ x''<0. \\ 2^0\ b<0\ c<0;\ \sqrt{b^2-4ac}>-b;\ x'>0,\ x''<0. \\ 3^0\ b>0\ c<0;\ \sqrt{b^2-4ac}>\ \ b;\ x'>0,\ x''<0. \\ 4^0\ b<0\ c>0;\ \sqrt{b^2-4ac}<-b;\ x'>0,\ x''>0. \end{cases}$$

Dacă comparăm semnele ce au rădăcinele x', x'' in cele patru casuri esaminate cu semnele corespunḑetoare ale terminilor ecuaţiunei

$$ax^2+bx+c=0,$$

şi dacă numim *variaţiune* schimbarea de semn ce intălnim cănd trecem de la un termin la următorul in ecuaţiune, şi *permanenţă* repeţirea aceluiaş semn pentru duoi termini consecutivi, atunci vom putè enunţà propo-

sițiunea următoare, care poate servi ca regulă practică pentru recunoascerea *a priori* a semnului rădăcinilor unei ecuațiuni complete de al duoilea grad.

O ecuațiune de al duoilea grad

$$ax^2+bx+c=0$$

care satisface la condițiunea $b^2-4ac>0$, are atâtea rădăcini positive câte variațiuni și atâtea rădăcini negative câte permanențe.

Esemplu. Fie ecuațiunea numerică

$$3x^2-5x+2=0.$$

Condițiunea $b^2-4ac>0$ este aici satisfăcută, căci avem

$$5^2-4.3.2=25-24=1>0.$$

După proposițiunea precedentă, putem afirmă că această ecuațiune are două rădăcini positive, căci presintă două *variațiuni*, una in trecere de la terminul antĕiu la al duoilea și ceialaltă de la terminul al duoilea la al treilea

In adevĕr aplicând formula generală

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

găsim

$$x'=\frac{5+\sqrt{25-24}}{6}=+1$$

$$x''=\frac{5-\sqrt{25-24}}{6}=+\frac{2}{3}.$$

ceia ce verifică proposițiunea mai sus enunțată.

202. *Nota.* In casul ce esaminăm caracterisat prin condițiunea $b^2-4ac>0$ ***membrul antĕiu al ecuațiunei***

$$ax^2+bx+c=0$$

se poate pune subt forma diferinței a două patrate.

In adevĕr putem scrì:

$$ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}=0$$

sau $ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right\}=0$

sau ăncă $ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2};\right\}=0$

ansă $b^2-4ac>0$, prin urmare vom putè pune $b^2-4ac=k^2$ de unde

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{k}{2a}\right)^2=0\right.$$

.ceea ce erà de aretat.

II. Trecem la al dúoilea cas principal, in care avem

$$b^2-4ac<0.$$

Putem pune $b^2-4ac=-k^2$,

de unde rădăcinile ecuaţiunei propuse vor devenì:

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac.}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{-k^2}}{2a}$$

$$x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{-k^2}}{2a}$$

cari sunt *espresiuni imaginare*, căci prin notaţiunea $\sqrt{-k^2}$ se cere un numĕr al cărui patrat se fie ecuale cu cuantitatea negativă $-k'$, ceea ce este cu neputinţă.

203. *Nota.* Esaminănd in acest cas formaţiunea membrului antĕiu al ecuaţiunei

$$ax^2+bx+c=0$$

putem găsì o interpretare a imposibilităţei rădăcinilor sale.

Putem scrì:

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right\}$$

sau $$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\};$$

ansă prin ipotesă

$$b^2-4ac=-k^2,$$

sau $$k^2=4ac-b^2;$$

de unde

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{k}{2a}\right)^2\right\}=0, \qquad (\varepsilon)$$

care ni arată că *in casul rădăcinilor imaginare, definit prin condiţiunea $b^2-4ac<0$, membrul antèiu al ecuaţiunei se reduce la suma a douè patrate*, care nu poate fi nici odată ecuale cu zero. Aşa dar valorile imaginare, ce ni le dă formula generală, sunt o consecinţă a imposibilităţei cuprinsă in ecuaţiune insaşi.

III. Când avem $b^2-4ac=0$, atunci formula generală ni dă:

$$x'=-\frac{b}{2a}$$

$$x''=-\frac{b}{2a}$$

ceea ce ni arată că rădăcinile ecuaţiunei $ax^2+bx+c=0$ se reduc la o singură valoare $-\frac{b}{2a}$. Se zice in acest cas că *rădăcinile ecuaţiunei sunt ecuale.* In adevĕr valoare $-\frac{b}{2a}$ se poate considerà ca limita către care tind rădăcinile

$$x'=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x''=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ când cuantitatea b^2-4ac tinde către zero.

204. *Nota. In casul rădăcinilor ecuali membrul antĕiu al ecuațiunei*

$$ax^2+bx+c=0$$

se reduce la un patrat esact.

In adevĕr avem

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right\}=0,$$

ansă prin ipotesă $4ac-b^2$ este zero prin urmare

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

ceea ce erà de aretat.

205. Resumănd resultatele obținute in discusiunea celor trei casuri principale ale formulei

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

vom avé:

1⁰ $b^2-4ac>0$. *Rădăcinile x', x'' ale ecuațiunei $ax^2+bx+c=0$ sunt reale și antĕiul seu membru iè forma diferinței a duoĕ patrate*

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{k}{2a}\right)^2\right\}=0.$$

2⁰ $b^2-4ac<0$. *Rădăcinile x', x'' șunt espresiuni imaginare. Membrul antĕiu al ecuațiunei: $ax^2+bx+c=0$ ie forma sumei a douĕ patrate*

$$a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{k}{2a}\right)^2\right\}=0.$$

3^0 $b^2-4ac=0$. *Rădăcinile x' x'' sunt ecuale. Avem* $x'=x''=-\frac{b}{2a}$ *Membrul anteiu al ecuaţiunei* $ax^2+bx+c=0$ *ie forma unui patrat esact*

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

Proprietăţile rădăcinilor ecuaţiunei $x^2+px+q=0$.

206. ***Teorema I.*** *Intr'o ecuaţiune de al duoilea grad de forma $x^2+px+q=0$, suma rădacinilor este ecuale cu minus coeficientul terminului al duoilea, şi productul lor este ecualu cu terminul din urmă.*

Insemnănd prin x' şi x'' rădăcinile ecuaţiunei

$$x^2+px+q=0$$

scim că avem $x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Adunănd aceste relaţiuni membru cătră membru, găsim:

$$x'+x''=-p$$

Immulţind membru cătră membru aceleşĭ relaţiunĭ căpătăm

$$x'x''=\left(-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)\left(-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}\right)$$

$$=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$$

saŭ $x'x''=q$, ceea ce era de demonstrat.

207. *Altă demonstraţiune.* Insemnănd prin x' şi x'' rădăcinile ecuaţiuneĭ $x^2+px+q=0$ vom ave, după însăşĭ

definițiunea generală a rădăcinilor unei ecuațiuni relațiunile identice

$$x'^2+px'+q=0 \qquad (\varepsilon)$$
$$x''^2+px''+q=0. \qquad (\varepsilon')$$

Scădind membru către membru aceste duoe relațiuni ni va venì :

$$x''^2-x'^2+p(x''-x')=0$$
sau $$(x''+x')(x''-x')+p(x''-x)=0\,;$$
de unde impărțind ambii membri prin factorul comun $x''-x'$, vom avè :
$$x''+x'+p=0.$$
sau $$x'+x''=-p.$$
care ni demonstră prima parte a teoremei.

Dacă acum in una din relațiunile (ε), (ε') substituim lui p valoarea$-(x'+x'')$ avem :

$$x'^2-(x'+x'')x'+q=0$$
sau $$x'^2-x'^2-x'x''+q=0\,;$$

de unde $$x'x''=q.$$

208. ***Aplicațiuni. Esemplul I.*** *A scri ecuațiunea de al duoilea grad a căreia suma rădăcinilor este s și productul lor t.*

Coeficientul terminului al duoilea intr'o ecuațiune de forma $x^2+px+q=0$, este ecuale cu minus suma rădăcinilor, căci $x'+x''=-p$ ni dă $p=-(x'+x')$; prin urmare dacă insemnăm prin X necunoscuta ecuațiunei cerute, vom avè in virtutea teoremei precedente

$$X^2-sX+t=O.$$

Esemplul II. *A găsi duoe numere a cărora sumă să fie* $+4$ *și al căror product să fie*-45.

Pentru a resolvi această cestiune va fi de ajuns a scri ecuaţiunea de al duoilea grad a căreea suma rădăcinilor să fie +4 şi productul lor —45; căci resolvirea acestei ecuaţiuni ni va da numerile căutate. Insemnănd aceste numere prin x, y vom avè $x+y=4$ şi $xy=-45$ Ecuaţiunea de al duoilea grad a căreia rădăcini vor fi respectiv ecuale cu x, y se va scri:

$$X^2-4X-45=0$$

de unde $X=2\pm\sqrt{4+45}=2\pm7$

sau $X'=x=+9$

$$X''=y=-5.$$

209. ***Nota.*** Teorema I ni dă asemene un mijloc pentru a recunoaşte *apriori* semnul rădăcinilor reale ale unei ecuaţiuni de al duoilea grad.

In adevĕr terminul din urmă q fiind ecuale cu productul rădăcinilor, ni va arătà că aceste rădăcini au acelaş semn sau semne contrare, după cum terminul q insuş va fi positiv sau negativ; de asemene —p fiind ecuale cu suma rădăcinilor, semnul lui —*p* va fi semnul comun al acestora sau al celei mai mari in valoarea absolută. Astfeliu in ecuaţiunea

$$u^2-4u-45=0$$

terminul —45 ni arată că rădăcinile acestei ecuaţiuni sunt de semn contrariu. De altă parte suma acestor rădăcini fiind ecuale cu +4, conchidem că rădăcina positivă este cea mai mare in valoarea absolută.

210. ***Teorema II.*** *Membrul ănteiu al unei ecuaţiuni de al duoilea grad se poate totdeauna descompune intr'un product de duoi factori binomi de gradul ănteiu.*

Fie ecuaţiunea

$$x^2+px+q=0$$

in care avem $p=-(x'+x'')$ şi $q=x'x''$. Vom pute scrì dar

$$x^2+px+q=x^2-(x'+x'')x+x'x''$$

sau $x^2+px+q=x^2-xx'-xx''+x''x''=x(x-x')x''(x-x)$

sau ăncă $x^2+px+q=(x-x' (x-x'')$

ceia ce era de demonstrat.

211. *Nota* I. Când ecuaţiunea complectă è de forma

$$ax^2+bx+c=0$$

atunci vom scrî $ax^2+bx+c=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right\}$

sau $ax^2+bx+c=a\ (x^2+px+q)$

$$=a(x-x')(x-x'')$$

212. *Nota* II. Teorema II. ni dă mijlocul de a descompune un trinom or-care de al duoilea grad, intr'un product de duoi factori binomi de gradul ăntĕiu.

Esémplu. Fie propus a descompune trinomul

$$5x^2+10x-315.$$

Vom scrì $5x^2+10x-315=5(x^2+2x-63)$.

Anulănd trinomul din parintesă, vom căpătà ecuaţiunea de al duoilea grad

$$x^2+2x-63=0,$$

pentru a căreia rădăcini avem

$$x=-1\pm\sqrt{1+63}$$

sau $x'=-1+8=7$

$$x''=-1-8=-9.$$

In virtutea teoremei precedente trinomul $x^2+2x-63$ este in mod identic ecuale cu productul $(x-x')(x-x'')$ sau $(x-7)(x+9)$. Prin urmare vom avè:

$$5x^2+10x-315=5(x^2+2x-63)=5(x-7)(x+9).$$

Proprietăţile trinomului ax^2+bx+c

123. Când in trinomul ax^2+bx+c x represintă o cuantitate variabilă, putĕnd primi toate valorile posibile cuprinse intre $-\infty$ şi $+\infty$, atunci valoarea acestui trinom este ea insaşi o cuantitate variabilă a căreea proprietăţi se pot enunţà in modul următoriu:

Teorema. *Valoarea variabilă a trinomului ax^2+bx+c are un semn contrariu sau ecuale cu semnul terminului ăntèiu, după cum x este sau nu cuprins intre rădăcinile x', x'' ale ecuaţiunei $ax^2+bx+c=0$.*

In adevĕr putem scrì in toate casurile

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right\}$$

sau

$$ax^2+bx+c=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}(*) \quad (r)$$

$$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$$

sau ăncă $ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x'')$, (r')

punĕnd $x'=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x''=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

cari sŭnt precum scim rădăcinile ecuaţiunei

$$ax^2+bx+c=0.$$

(*) *După convenţiunea făcută asupra espresiunilor imaginare vom avè in mod identic.*

$$(\sqrt{b^2-4ac})^2=b^2-4ac, \textit{ fie } b^2-4ac>\textit{ sau }<0$$

Sunt trei casuri principale de esaminat, după cum rădăcinile x', x'' sunt 1⁰ *reale neecuali*, 2⁰ *reale ecuali*, 3⁰ *imaginare*; in alte cuvinte după cum avem

$$b^2-4ac>0$$
$$=0$$
$$<0.$$

I. Rădăcinile x', x'' fiind reali şi neecuali să presupunem că x' este rădăcina cea mai mică şi x'' cea mai mare. Atunci este in vederat că intru cât valoarea variabilei x va fi $<x'$ productul $(x-x')(x-x'')$ va fi positiv, căci ambii factori sunt negativi. In virtutea relaţiunei (r') semnul trinomului ax^2+bx+c va fi in acest cas semnul lui a sau al terminului antĕiu ax^2. Când x in variaţiunea sa de la $-\infty$ la $+\infty$ ajunge a fi ecuale cu x', valoarea trinomului se anulează. Când x trece dincolo de această valoare remănĕnd mai mic de cât x'', atunci antĕiul factor fiind positiv şi al duoilea negativ, productul $(x-x')(x-x'')$ va fi negativ. Prin urmare semnul lui $a(x-x')(x-x'')$ adică al trinomului ax^2+bx+c, va fi atunci contrariu cu semnul terminului antĕiu. Când x, in variaţiunea sa, ajunge a fi ecuale cu x'' trinomul ax^2+bx+c se anulează din nou şi conservă apoi un semn ecuale cu semnul lui a pentru toate valorile lui x mai mare de cât x''. Aşa dar in casul $b^2-4ac>0$ semnul trinomului ax^2+bx+c este contrariu sau ecuale cu semnul terminului antĕiu, după cum valoarea variabilei x este sau nu, cuprinsă intre rădăcinile x', x'', ceea ce este conform cu enunciul teoremei.

II. Când rădăcinile x', x'' sunt ecuale atunci relaţiunea (r') se reduce la

$$ax^2+bx+c=a(x-x')^2$$

sau

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2,$$

căci pentru $b^2-4ac=0$, avem $x'=x''=-\frac{b}{2a}$ In acest cas

vedem iarăşi că semnul trinomului ax^2+bx+c este acelaş cu semnul terminului antĕiu, pentru toate valorile lui x mai mici sau mai mari de căt x'. Pentru valoarea unică $x=x'$ trinomul se anulează.

III. Cănd rădăcinile x', x'' sunt imaginare ceea ce se intămplă cănd b^2-4ac este <0 sau $b^2-4ac=-k^2$, atunci espresiunea trinomului ax^2+bx+c se reduce la productul lui a prin suma a duoĕ patrate. Avem in adevĕr in acest cas

$$x'=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{-k^2}}{2a}, \quad x''=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{-k^2}}{2a}$$

sau $$x'=-\frac{b}{2a}+\frac{k}{2a}\sqrt{-1}=\alpha+\beta\sqrt{-1}$$

$$x'=-\frac{b}{2a}-\frac{k}{2a}\sqrt{-1}=\alpha-\beta\sqrt{-1}.$$

represintănd pentru abreviare, $-\frac{b}{2a}$ prin α şi $\frac{k}{2a}$ prin β.
Relaţiune (r') va deveni

$$ax^2+bx+c=a(x-x')(x-x')=a(x\quad\alpha+\beta\sqrt{-1}).$$
$$(x-\alpha-\beta\sqrt{-1}).$$

sau ăncă $$ax^2+bx+c=a[(x-\alpha)^2+\beta^2)],$$

căci $$(\sqrt{-1})^2=-1.$$

Supt această formă vedem că semnul trinomului va fi neincetat semnul lui a pentru toate valorile variabilei x, care fiind o cuantitate reală nu va pute fi cuprinsă in acest cas intre rădăcinile imaginare x', x''. Aşa dar in căte trele casurile semnul trinomului ax^2+bx+c, este contrariu sau ecuale cu semnul terminului antĕiu, după cum valoarea lui x este sau nu cuprinsă intre rădăcinile x', x'' ale ecuaţiunei $ax^2+bx+c=0$, ceia ce erà de demonstrat.

214. ***Resolvirea ecuaţiunei*** $mx^4+nx^2+r=o$. Formula gâsită pentru resolvirea ecuaţiunei de al duoilea grad $ax^2+bx+c=0$ ni poate servi la resolvirea ecuaţiunei de al patrulea grad

$$mx^4+nx^2+r=0 \qquad (1)$$

căreea i se dă numire de *ecuaţiune bipatrată*. In adevĕr punĕnd $x^2=y$, această ecuaţiune se va scri:

$$my^2+ny+r=0 \qquad (2) ;$$

de unde, aplicănd formula cunoscută, vom avè

$$y=\frac{-n+\pm\sqrt{n^2-4mr}}{2m}.$$

Ansă $y=x^2$, prin urmare

$$x=\pm\sqrt{\frac{-n\pm\sqrt{n^2-4mr}}{2m}}, \qquad (3)$$

sau $$x=\pm\sqrt{A\pm\sqrt{B}} \qquad (4)$$

punĕnd $A=-\frac{n}{2m}$ şi $B=\frac{n^2}{4m^2}-\frac{r}{m}$.

Formula precedentă ni dă pentru necunoscuta x patru valori:

$$x_1=+\sqrt{A+\sqrt{B}}$$

$$x_2=+\sqrt{A-\sqrt{B}}$$

$$x_3=-\sqrt{A+\sqrt{B}} \qquad (5)$$

$$x_4=-\sqrt{A-\sqrt{B}}$$

Aşa dar ecuaţiunea (1) *are patru radăcini ecuale căte duoĕ şi de semn contrariu.*

Transformarea espresiunilor de forma $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$.

215. Ni propunem a transforma espresiunea $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ intr'o sumă sau o diferinţă de duoi radicali independenţi, ceea ce ni va presinta avantage in aplicaţiunile numerice.

Pentru aceasta este de ajuns a găsi duoĕ numere raţionale x, y cari să satisfacă relaţiunea

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}. \qquad (5)$$

Redicănd ambii membri la patrat ni va veni:

$$A \pm \sqrt{B} = x + y \pm 2\sqrt{xy};$$

sau

$$(A - x - y) \pm \sqrt{B} = \pm 2\sqrt{xy}.$$

Redicănd din nuou la patrat avem

$$(A - x - y)^2 + B \pm 2(A - x - y)\sqrt{B} = 4xy. \qquad (7)$$

In această relaţiune membrul al duoilea fiind o cuantitate raţională, va trebui ca şi ăntĕiul să se afle in acelaş cas; prin urmare terminul iraţional $2(A - x - y)\sqrt{B}$ din membrul ăntĕiu trebuie să fie nul. Va trebui dar să avem relaţiunea:

$$A - x - y = 0 \text{ sau } x + y = A. \qquad (8)$$

Ansă atunci relaţiunea (7) se reduce la

$$B = 4xy \text{ sau } xy = \frac{B}{4}. \qquad (9)$$

Intre cuantităţile x,y pre cari le căutăm, am gasit relaţiunele (8), şi (9) cari ni permit a le determina considerăndule ca rădăcini ale unei ecnaţiuni de al duoilea grad. Avem

$$Z^2 - AZ + \frac{B}{4} = 0. \quad (10)$$

de unde $$Z = \frac{A}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{B}{4}} = \frac{A \pm \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

Observând că rădăcinile ecuaţiunei (10) sunt inseşi numerile căutate x şi y, vom avê:

$$x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

$$y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

de unde relaţiunea (6) va deveni

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad (11)$$

Transformarea din al duoilea membru va presintà avantage când cuantitatea $A^2 - B$ va fi un patrat esact. In asemene casuri punĕnd $A^2 - B = k^2$ avem:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + k}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - k}{2}}. \quad (12)$$

216. *Esemplu. A transformà espresiunea* $\sqrt{3 + \sqrt{5}}$.

Vom avè:

$$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{9 - 5}}{2}} + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{9 - 5}}{2}}.$$

sau $$\sqrt{3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{5}{2}} + \sqrt{\frac{3 - 2}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}$$

217. ***Aplicațiuni. Problema I.*** *A găsi adăncimea unei făntăni cunoscĕnd timpul t ce se strecoară intre inceputul căderei unei petre și minuntul in care se aude vuetul ce produce peatra ajungĕnd in fundul făntănei.*

Pentru punerea problemei in ecuațiune observăm că timpul *t* se compune din duoĕ părți: din timpul in care se esecută căderea petrei din A in B și din timpul in care se comunică sunetul din B in A. Insemnănd ăntĕiul prin t_1 și al duoilea prin t_2 vom avè:

$$t_1+t_2=t, \quad (\alpha)$$

care este insași ecuațiunea problemei. Ne remăne numai a introduce in această ecuațiune adăncimea *x* care este adevĕrata necunoscută, eliminănd pe t_1 și t_2 cari nu sunt de căt niște *necunoscute auxiliare.* Pentru aceasta ne basăm pe legile căderei corpurilor și a propagațiunei sunetului. Scim că *spațiele descrise, in căderea corpurilor, sunt proporționale cu patratele timpurilor,* iar in propagațiunea sunetului, *proporționale cu timpul simplu.* Insemnănd dar prin $\frac{g}{2}$ spațiul percurs in prima secundă a căderei și prin v repegiunea sunetului adicĕ spațiul ce percurge sunetul intr'o secundă, vom avè relațiunile:

$$\frac{x}{\frac{g}{2}}=\frac{t_1^2}{1} \text{ sau } x=\frac{gt_1^2}{2}, \qquad (\beta)$$

$$\frac{x}{v}=\frac{t_2}{1} \text{ sau } x=vt_2. \qquad (\gamma)$$

Din relațiunile (β), (γ) deducem $t_1=\sqrt{\frac{2x}{g}}$, $t_2=\frac{x}{v}$,

de unde ecuaţiunea (α) va deveni:

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}+\frac{x}{v}=t$$

sau

$$\sqrt{\frac{2x}{g}}=t-\frac{x}{v}. \quad (\delta)$$

Redicănd ambii membri ai acestei ecuaţiuni la patrat, ni va veni:

$$\frac{2x}{g}=t^2-2t\frac{x}{v}+\frac{x^2}{v^2},$$

sau

$$\frac{x^2}{v^2}-2\left(\frac{t}{v}+\frac{1}{g}\right)x+t^2=0,$$

sau ăncă

$$x^2-2\left(vt+\frac{v^2}{g}\right)x+v^2t^2=0, \quad (\delta')$$

ecuaţiune definitivă a problemei propusă.

Aplicăndu-i formula cunoscută vom avè:

$$x=\left(vt+\frac{v^2}{g}\right)\pm\sqrt{\left(vt+\frac{v^2}{g}\right)^2-v^2t^2},$$

sau

$$x=\left(vt+\frac{v^2}{g}\right)\pm v\sqrt{\frac{v^2}{g^2}+\frac{2vt}{g}}$$

sau ăncă

$$x=v\left\{t+\frac{v}{g}+\sqrt{\frac{v^2}{g^2}+\frac{2vt}{g}}\right\}. \quad (\delta'')$$

Discusiune. Formula (δ'') ni dă o duplă valoare pentru necunoscuta x. Prin natura cuestiunei ănsă x nu pote avè de căt o singură valoare. Dintre cele duoĕ valori cuprinse in formula precedentă, care-i dar adevĕrata valoare a necunoscutei?

Pentru aceasta observăm că in virtutea formulei (γ) $x=vt_2$ in care $t_2<t$. Prin urmare valoarea necunoscutei va trebui se satisfacă la condiţiunea.

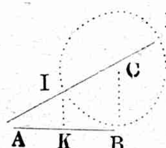
$$x<vt, \qquad (\varepsilon)$$

ceea ce ne conduce a luà

$$x=v\left\{t+\frac{v}{g}-\sqrt{\frac{v^2}{g^2}+\frac{2vt}{g}}\right\}, \qquad (\delta.)$$

cara va fi adevĕrata espresiune a adăncimei căutate, căci in această formulă $\frac{v}{g}$ fiind mai mic de cât $\sqrt{\frac{v^2}{g^2}+\frac{2vt}{g}}$, valoarea lui x va fi $<vt$.

Problema II. *A impărţi o dreaptă in medie şi estremă raţiune.*



Fie AB dreaptă dată. A o impărţi in medie şi estremă raţiune este a o impărţi in duoĕ segmente astfel ca cel mai mare să fie mediu proporţional între linia intreagă şi cel mai mic segment.

Însemnănd prin a lungimea liniei AB şi prin x segmentul cel mai mare, vom avè proporţiunea

$$\frac{x}{a-x}=\frac{a}{x},$$

care ni dă $\qquad x^2=a(a-x),$

sau $\qquad x^2+ax-a^2=0. \qquad (1)$

Resolvind această ecuaţiune avem:

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4.}+a^2} \qquad (2)$$

Această formulă ni dă pentru necunoscuta x duoĕ valori dintre cari una positivă

$$x'=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4.}+a^2}$$

şi alta negativă $x''=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$. După enunţarea problemei singura valoare admisibilă este valoarea positivă $-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$, căci segmentul căutat nu poate fi negativ.

Putem determinâ uşor mărimea sa geometrică printr'o construcţiune grafică. Este de ajuns a redicâ pe dreapta AB in puntul B o perpendiculă, a luà pe direcţiunea acesteia o lungime $CB=\frac{a}{2}$ şi din puntul C ca centru cu CB ca radia a descri o circonferinţă. Unind puntul A cu C căpĕtăm un triunghiu dreptunghic in B, in care avem:

$$AC=\sqrt{\overline{C}B^2+\overline{A}B^2}=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2},$$

sau $$AI+IC=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2};$$

de unde $$AI=-IC+\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=-\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}.$$

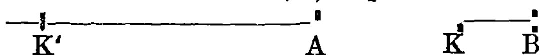
Pentru a impărţi dar dreapta AB in medie şi estremă raţiune vom descri din puntul A ca centru cu AI ca radiă un arc, care prin intelnirea sa in K cu dreapta AB ni va da lungimea *AK* a segmentului căutat.

Cât pentru rădăcina negativă x'', observăm că valoarea sa absolută este represintată in figură prin lungimea

$$AM=AC+CM$$

$$=\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}+\frac{a}{2}.$$

Dacă aşternem această lungime la stănga puntului A pe prelungirea lui AB, prin descrierea unui arc de cerc din A ca centru cu a AM ca raḑiă, căpătăm un al duoilea



punt K'. Rădăcina negativă $x''=-\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}$ devine o rădăcină admisibilă represintată prin—AK', dacă modificăm enunciul problemei in modul următoriu:

Pe o dreaptă indefinită AB, a determinà un punt al cărui distanţă de puntul A, să fie o medie proporţionălă intre distanţa sa de puntul B şi linia intreogă AB.

Punĕnd această problemă in ecuaţiune găsim ecuaţiunea de mai nainte

$$x^2+ax-a^2=0$$

acăreea soluţiuni ni le dă formula (2). Soluţiunea positivă corespunde la puntul K şi cea negativă la puntul K'.

Problema III. *Intr'o proporţiune geometrică, suma internilor este* **a**, *suma esternilor* **b** *şi suma patratelor a cătesi patru terminilor este* **c**: *cari sunt terminii proporţiunei?*

Insemnănd prin x, y, z, u terminii proporţiunei căutate, vom avè:

$$x:y::z:u \qquad (\alpha)$$

sau

$$xu=yz; \qquad (\beta)$$

şi

$$\left.\begin{array}{r} y+z=a \\ x+u=b \\ x^2+y^2+z^2+u^2=c. \end{array}\right\} \quad (\gamma)$$

Făcĕnd suma patratelor celor de'ntĕi duoĕ relaţiuni din sistema (γ), găsim

$$xu=yz=\frac{a^2+b^2-c}{4};$$

de unde deducem următoarile duoĕ sisteme de relaţiuni intre necunoscutele x, y, z, u:

$$\left.\begin{aligned} x+u&=b \\ xu&=\frac{a^2+b^2-c}{4} \end{aligned}\right\}(\delta) \qquad \left.\begin{aligned} y+z&=a \\ yz&=\frac{a^2+b^2-c}{4} \end{aligned}\right\}(\delta')$$

cari in virtutea *teoremei I* ni serv a forma duoĕ ecuaţiuni de al duoilea grad ale căror rădăcini vor fi insişi terminii căutaţi. Insemnănd necunoscutele acestor ecuaţiuni prin X şi Y vom avè:

$$X^2-bX+\frac{a^2+b^2-c}{4}=0$$

$$Y^2-aY+\frac{a^2+b^2-c}{4}=0,$$

de unde X sau $\left\{\begin{matrix} x \\ u \end{matrix}\right\}=\frac{b+\sqrt{c-a^2}}{2};$

Y sau $\left\{\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\right\}=\frac{b\pm\sqrt{c-b^2}}{2}.$

Problema IV. *A impărţi un numer* **a** *in duoĕ părţi astfeliu ca suma patratelor lor să fie ecuale cu* **b.**

Ecuaţiunea problemei va fi:

$$x^2+(a-x)^2=b$$

sau

$$2x^2-2ax+(a^2-b)=0$$

care ni dă:

$$x'=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{b}{2}-\frac{a^2}{4}}.$$

$$x''=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{b}{2}-\frac{a^2}{4}}.$$

Problema V. *O societate de duoedeci persoane, civili si militari, cheltuiesc impreună intr'un voiagiu de plăcere o sumă de 48 galbeni. Partea colectivă plătită de civili este ecuale cu partea plătită de militari. Fie care civil ănsă plătesce un galben mai mult de căt ceea ce plătesce un militar; căţi civili erau?*

Vom avè pentru ecuaţiunea problemeĭ

$$\frac{24}{x}=\frac{24}{20-x}+1 \qquad (1)$$

sau $$x^2-68x+2.240=0.$$

Resolvind găsim:

$$x=34 \pm 26, \qquad (2)$$

Numĕrul necunoscut al civililor ne putĕnd avè de căt o singură valoare, şi observănd că trebue să fie <20, vedem că singurul semn ce putem lua in formula (2) este — care ni dă ca soluţiune

$$x'=8.$$

218. ***Esercitii.*** ***1.*** *A areta că soluţiunile ecuaţiunei $ax^2+bx+c=0$ deduse din formula generală $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ pentru casul particulariu $a=0$, sunt in acord cu rădăcinile determinate prin esaminarea directă a ecuaţiunei.*

Nota. Acordul căutat se găsesce uşor dacă se pune ecuaţiunea subt forma

$$\frac{-bx-c}{x^2}=a.$$

2⁰. A resolvi ecuaţiunea

$$\left(\frac{1}{10}\right)^n x^2+5x+1=0, \; n \text{ fiind} > 1.$$

NOTA. In acest cas aplicaţiunea formulei generale ni-ar dà:

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4.\overline{10}^n}}{2.\overline{10}^n}$$

Această formulă are incovenientul de a mări eroarea ce se comite in calculul valorei numerice a radicalului

$$\sqrt{5^2-4.\overline{10}^n};$$

căci dacă ε este acea eroare, atunci determinaţiunile rădăcinilor x' x'' vor fi afectate de eroarea cu mult mai considerabilă 10^n ε.

Procedeul intrebuintat in asemene casuri este următorul: Se pune ecuaţiunea propusă subt forma.

$$x=-\frac{1}{5}-\frac{x^2}{5.10^n}. \qquad (1)$$

Neglijênd terminul $\frac{x^2}{5.10^n}$ care este foarte mic in raport către $\frac{1}{5}$ când n este un numĕr positiv mai mare de căt unitaled, avem o anteie valoare aprocsimativă

$$x_1=-\frac{1}{5}. \qquad (2)$$

Ducĕnd această valoare in locul lui x in al duoilea membru al ecuaţiunei (1) vom căpăta o aduoa valoare mai apropiată a necunoscutei.

$$x^2=-\frac{1}{5}-\frac{1}{5^3.10^n} \qquad (3).$$

Ducănd aceastǎ din urmă valoare in locul lui x in al duoilea membru al ecuaţiunei (1) ni va veni:

$$x_3=-\frac{1}{5}-\frac{1}{5.10^n}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^3 10^n}\right)^2$$

$$=-\frac{1}{5}-\frac{1}{5^3 10^n}-\frac{2}{5^5.10^{2n}}-\frac{1}{5^7.10^{2n}}$$

sau $$x_3=-\frac{1}{5}-\frac{1}{5^3.10^n}-\frac{2}{5^5.10^{2n}},$$

neglijĕnd terminul din urmă. Continuănd astfeliu vedem că valoarea numerică a uneia din rădăcinile ecuaţiunei (1) se va putè determina cu o aprocsimaţiune or-căt de mare vom voi, Această metoadă poartă nume de **metoda aprocsimaţiunilor succesive.** *Insemnănd prin x' rădăcina determinată in acest mod, adoua rădăcină x'' se va deduce din relaţiunea*

$$x''+x'=-5.10^n.$$

3⁰. *A resolvì ecuaţiunea*

$$ax^{2n}+bx^n+c=0.$$

4⁰. *A resolvì sistema* $x+y=a$

$$x^2+y^2=b^2.$$

Nota. *Necunoscutele x, y se determină uşor cu ajutorul unei ecuaţiuni aucsiliare de al duoilea grad de forma*

$$Z^2-AZ+B=0.$$

5⁰. *A resolvi ecuaţiunea*

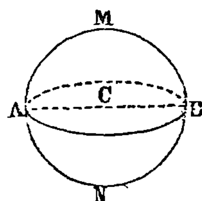
$$x+\sqrt{x}=a.$$

Soluţiune: $x=\frac{2a+1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$

Cuestiuni de maximum şi de minimum.

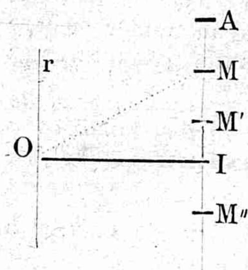
219. Când o cuantitate variabilă trecĕnd printr'un şir de valori ascendente sau crescĕtoare, incepe a descresce, se ḑice atunci că trece printr'un *maximum* sau printr'o *valoare maximum*. Astfeliu o *valoare maximum a unei cuantităţi variabile este o valoare mai mare de cât toate valorile vecine, precĕdente sau următoare.*

Esemplu. Aria cercului de secţiune a unei sfere de raḑa R cu un plan care se mişcă paralel cu sine insuş, este o cuantitate variabilă care trece printr'un *maximum* când planul secant trece prin centrul sferei. *Valoarea sa maximum* este πR^2 adicĕ aria unui cerc mare.



Dicem asemene că o cuantitate variabilă trece prin-r'un *minimum*, când, după un şir continuu de valori

descrescĕtoare, incepe a cresce; aşa incăt o *valoare miniumum* a unei *cuantităţi variabile este o valoare mai mică de căt toate valorile vecine, precedente sau următoare*.



Esemplu. Dintre toate treptele OM, OM', OM'' cari unesc puntul o cu diferitele punte M, M', M'' dreapta OI perpendiculară la AB are lungimea *minimum*.

220. Resolvirea cuestiunilor de *maximnm* şi de *minimum* se basază in general pe teoria *funcţiunilor derivate*; cănd ănsă ne mărginim la funcţiuni de al duoilea grad, atunci determinarea valoarei *maximum* sau *minimum* se poate efectua cu ajutorul teoriei ecuaţiunilor de al duoilea grad şi a căte-va teoreme.

221. ***Teorema I***. *Productul al duoi factori variabili, a căror sumă este constantă, este maximum cănd factorii sint ecuali.*

Insemnănd prin s suma constantă a factorilor variabili x, y şi prin P productul lor vom avè

$$x+y=s \qquad (1)$$
$$P=xy=x(s-x)=sx-x^2$$
$$P=\frac{s^2}{4}-\left(x^2-sx+\frac{s^2}{4}\right)=\frac{s^2}{4}-\left(x-\frac{s}{2}\right)^2. \qquad (2)$$

Espresiunea membrului al duoilea ni arată că *P* va fi *maximum* cănd vom avè

$$x-\frac{s}{2}=0$$

sau

$$x=\frac{s}{2};$$

ănsă atunci relaţiunea (1) ni dă asemene

$$y=\frac{s}{2},$$ ceea ce erà de aretat.

222. *Nota.* Se poate demonstrâ uşor că teorema precedentă se aplică la un product de un numĕr or-care de factori a căror sumă este constantă. Enunţarea sa este atunci următoarea:

Productul unui numĕr or-care de factori variabili a căror sumă este constantă, este **maximum** *când factori sunt ecuali.*

Fie P productul factorilor variabili x, y, z....u, v a căror sumă este o constantă a. Vom ave:

$$x+y+z+....+u+v=a, \qquad (\alpha)$$
$$P=x.y.z....u.v. \qquad (\beta)$$

Pentru ca productul P să fie *maximum*, ḑic că trebuie să avem $x=y=z=....=u=v$. In adevĕr factorii variabili x, y, z.... fiind supuşi la singura condiţiune (α), vom putè substituì productului al duoi factori or-cari patratul mediei lor aritmetice, căci

$$\frac{x+y}{2}+\frac{x+y}{2}=x+y;$$

ănsă astfeliu vom avè

$$P_1=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 z....u.v.>P$$

căci $$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy=\frac{1}{4}(x-y)^2>0.$$

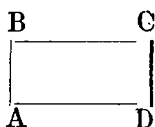
Productul P cresce dar când inlocuim duoi factori neecuali x y prin factorii ecuali $\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

Aşa dar valoarea productului

$$x.y.z....u.v.$$

nu poate fi *maximum* intru căt duoi or-cari din factori sunt neecuali. Prin urmare pentru ca productul $P=x.y...u,v$ să fie maximum, trebuie să avem $x=y=z=..=u=v$, ceea ce erà de demonstrat.

223. ***Aplicațiuni Problema I.*** *Dintre toate dreptunghiurile al căror perimetru este o cuantitate constantă 2a, care este dreptunghiul a căruia suprafață este maximum?*



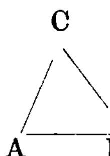
Fie x, y dimensiunile dreptunghiului și s suprafața, vom avè:

$$2x+2y=2a \text{ de unde } x+y=a$$

și $$s=xy.$$

Factorii x, y avĕnd o sumă constantă productul lor va fi *maximum* cănd vom avè $x=y=\frac{a}{2}$; ceea ce ni arată că *dreptunghiul cu perimetru 2a și cu suprafața maximum este un patrat.*

Problema II. *Dintre toate triunghiurile cari au acelas perimetru 2p și o basă constantă* **a**, *care este triunghiul a căruia suprafață este maximum?*



Insemnănd prin S suprafața triunghiului, scim că esistă relațiunea

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad (1)$$

in care avem $a+b+c=2p$. Valoarea S depinde de valoarea productului factorilor variabili $p-b$, $p-c$; ănsă suma acestor duoi factori este o cnantitate constantă, căci avem

$$p-b+p-c=2p-b-c=a.$$

Prin urmare suprafața S a triunghiului va fi *maximum* cănd vom avè

$$p-b=p-c$$

sau $$b=c.$$

ceea ce ni arată că *dintre toate triunghiurile cari au acelaş perimetru şi aceeaşi basă triunghiul isoscel este triunghiul al căruia suprafaţă este maximum.*

224 ***Teorema II.*** *Spre a impărţi un numer* **a** *in duoĕ părţi astfeliu ca suma patratelor să fie un minimum, trebuie a'l impărţi in doue părţi ecuali.*

Insemnănd prin x si y părţile numĕrului *a* şi prin *s* suma patratelor lor vom avè

$$x+y=a \qquad (1)$$
$$s=x^2+y^2=x^2+(a-x)^2;$$

au $$s=2\left(x^2-ax+\frac{a^2}{2}\right)=2\left\{\frac{a}{4}+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right\}$$

sau ăncă $$s=\frac{a^2}{2}+2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2. \qquad (2)$$

Această din urmă relaţiune ni arată că valoarea lui *s* va fi *minimnm* cănd partea variabilă din al duoilea membru va fi ea insaşi *minimum,* adicĕ $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0$

sau $x=\frac{a}{2}$. Ansă atunci relaţiunea (1) ni dă asemene

$$y=\frac{a}{2}=x,$$

ceea cc era de aretat.

225 ***Aplicaţiune.*** *Dintre toate dreptunghiurile al căror perimetru este o cuantitate constantă 2p, care este dreptunghiul a cărui diagonală este minimum?*

Insemnănd prin x, *y* dimensiunile dreptungiului şi prin *d* diagonala, vom avè



$$2x+2y=2p \text{ sau } x+y=p, \qquad (\cdot)$$

şi $$d^2=x^2+y^2=x^2+(p-x)^2$$

In virtutea teoremei precedente *d* va fi un *minimum* când va fi verificată relaţiunea

$$x = p - x, \text{ sau } x = \frac{p}{2}.$$

Ansă atunci relaţiunea (ε) ni dă asemene $y = \frac{p}{2}$ prin urmare din toate dreptunghiurile cari au acelaş perimetru, patratul este dreptunghiul al căruia diagonală este *minimum*.

226. ***Problema.*** *A descompune un numĕr în duoi factori astfeliu ca suma lor să fie minimum.*

Insemnănd prin x, y factorii căutaţi şi prin m suma lor, vom avè

$$xy = a, \qquad (\delta)$$

$$x + y = m, \text{ sau } x + \frac{a}{x} = m; \qquad (\delta')$$

de unde ni va resultà ecuaţiunea

$$x^2 - mx + a = 0$$

care ni dă $x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - a}.$

Factorul x trebuind a fi real vedem că $\frac{m^2}{4}$ nu poate fi mai mic de căt *a*; prin urmare *minimumul* sumei *m* a factorilor x, y se va deduce din relaţiunea

$$\frac{m^2}{4} - a = 0 \text{ sau } m = 2\sqrt{a}.$$

Ansă atunci $x = y = \frac{m}{2} = \sqrt{a}.$ Prin urmare *pentru a descompune un numĕr dat în duoi factori a căror sumă să fie un minimum, trebuie a'l descompune in duoi factori ecuali cu rădăcina patrată a acestui numĕr.*

227. ***Teorema III.*** *Productul potenților a mai multor factori cari au o sumă constantă, este maximum când factorii sunt proporționali cu esponenții lor.*

Insemnănd prin x, y, z factorii, prin m, n, p esponenții lor respectivi și prin *a* suma lor constantă, vom avè :

$$x+y+z=a \qquad (\alpha)$$
$$P=x^m.y^n.z^p.$$

Pentru a demonstrà teorema, observăm că putem scri :

$$P=m^m.n^n.p^p.\left(\frac{x}{m}\right)^m.\left(\frac{y}{n}\right)^n\left(\frac{z}{p}\right)^p$$

sau $P=m^m.n^n.p^p.\ \frac{x}{m}.\frac{x}{m}..\frac{y}{n}.\frac{y}{n}....\frac{z}{p}.\frac{z}{p}....$

in care factorii variabili $\frac{x}{m}, \frac{y}{n}, \frac{z}{p}$ satisfac la condițiunea (α), căci

$$m.\frac{x}{m}+n.\frac{y}{n}+p.\frac{z}{p}=x+y+z=a\,;$$

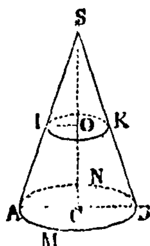
prin urmare (222) pentru ca productul P să fie *maximum* trebuie ca factorii să fie ecuali, adicĕ să avem

$$\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p},$$

ceea ce era de demonstrat.

228. ***Nota.*** Această demonstrațiune se poate aplica fără schimbare la casul unui numĕr or care de factori cari au o sumă constantă. Teorema este dar generală. In aplicațiuni ănsă va trebui a esamina dacă proporționalitatea intre factori și esponenți este compatibilă cu natura cuestiunei.

229. ***Aplicațiuni. Problema I.*** *A inscrì într'un con un cilindru al cărui volume să fie maximum.*



Insemnănd prin y inălțimea OC a cilindrului inscris și prin x rada IO a basei sale, vom avè pentru espresiunea volumelui căutat.

$$V = \pi x^2 y \qquad (1)$$

Ansă triunghiurile asemene SAC și SIO ni dau

$$\frac{OI}{CA} = \frac{SO}{SC}$$

sau $\frac{x}{r} = \frac{h-x}{h}$, h și r fiind inălțimea și rada basei conului. Din această din urmă relațiune deducem

$$y = \frac{h}{r}(r-x). \qquad (2)$$

Ducĕnd in espresiunea lui V in locul lui y valoarea sa, ni va venì

$$V = \pi \frac{h}{r} . x^2(r-x). \qquad (3)$$

Suma factorilor x *și* $(r-x)$. fiind ecuale cu constanta r, productul variabil $x^2(r-x)$ va fi *maximum,* după teorema precedentă, cănd vom avè

$\frac{x}{2} = \frac{r-x}{1}$, sau $x = \frac{2}{3}r$; de unde $y = \frac{h}{3}$.

Nota. Substituind lui x din formula (3) valoarea sa aflăm că valoarea *maximum* a volumelui cilindrului inscris, este

$$V = \frac{4}{27}\pi h r^2$$

sau ăncă $$V = \frac{4}{9} V,$$

insemnănd prin V, volumele conului propus.

Problema II. *A inscri intr'o sferă de radă r un cilindru al cărui volume să fie* **maximum.**

Insemnănd prin x rada şi prin $2y$ inălţimea cilindrului inscris, vom avè

$$V = \pi x^2 . 2y.$$

Ansă intre x şi y se găsesce uşor relaţiunea

$$x^2 + y^2 = r^2$$

de unde $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Prin urmare espresiunea volumelui V va deveni

$$V = 2\pi x^2 \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Pentru a determinà *maximumul* lui V observăm că este de ajuns a determinà *maximumul* lui V^2, căci o estragere de rĕdăcină pătrată ni va dá atunci valoarea *maximum* a volumelui V. Vom avè astfeliu

$$V^2 = 4\pi^2 . (x^2)^2 . (r^2 - x^2).$$

Valoarea lui V^2 va fi *maximum*, cănd productul variabil $(x^2)^2 (r^2 - x^2)$ va fi el insuş *maximum*. Ansă observăm că suma factorilor x^2 şi $r^2 - x^2$ este ecuale cu constanta r^2; prin urmare pentru ca V să fie *maximum* va trebuì să avem

$$\frac{x^2}{2} = \frac{r^2 - x^2}{1},$$

sau

$$x = r\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Valoarea *maximum* a volumelui V va fi

$$V = 2\pi \frac{2}{3} r^2 \sqrt{r^2 - \frac{2}{3} r^2} = \frac{4}{3} \frac{\pi r^3}{\sqrt{3}}$$

sau

$$V = \frac{V_1}{\sqrt{3}}$$

insemnănd prin V_1, volumele sferei propuse.

Problema III. *A găsi maximumul și minimumul prin care trece fracțiunea.*

$$\frac{4x^2-6x+3}{3x-5},$$

când x *variază de la* $-\infty$ *la* $+\infty$.

Representând prin *m* valoarea fracțiunei propuse vom avè

$$\frac{4x^2-6x+3}{3x-5}=m.$$

Desfăcĕndu-ne de numitoriu și trecĕnd totul in membrul ăntĕiu ni va resulta ecuațiunea de al duoilea grad

$$4x^2-(3m+6)x+(5m+3)=0, \quad (\alpha)$$

acăreea resoluțiune ni dă:

$$x=\frac{3m+6\pm\sqrt{(3m+6)^2-16(5m+3)}}{8}$$

sau $$x=\frac{3m+6\pm\sqrt{9m^2-44m-12}}{8} \quad (\beta)$$

sau ăncă $$x=\frac{3m+6\pm\sqrt{9(m-m')(m-m'')}}{8} \quad (\gamma)$$

in care m', m" sunt rădăcinile ecuațiunei

$$9m^2-44m-12=0. \quad (\gamma')$$

Resolvind-o găsim

$$m'= \ \ 0,259$$
$$m'=+5,148.$$

Valorile variabilei x fiind prin ipotesă reale, productul $9(m-m')(m-m'')$ de supt radical va trebui să fie positiv. Pentru aceasta *m* va trebui a nu fi cuprins intre m' si m", căci atunci in virtutea teoremei (213) valoarea trinomului $9m^2-44m-12$ are un semn contrar cu semnul terminului ăntĕiu $9m^2$, adecă este negativă.

Prin urmare valoarea *m* a fracţiunei propuse va admite duoĕ serii de valori, una descresĕtoare începĕnd cu m′ şi tinḑĕind cătră $-\infty$ şi alta crescĕtoare începĕnd cu m″ şi mergĕnd cătră $+\infty$. Dintre valorile lui *m* care compun ăntĕi serie, valoarea iniţială $m=m'=-0,259$ care anulează trinomul de supt radical este un *maximum* al fracţiunei

$$\frac{4x^2-6x+3}{3x-5}$$

Valoarea variabilei *x* corespunḑetoare la acest *maximum* şi care se deduce din formula (γ), este:

$$x=\frac{-3.0,259+6}{8}=+0,652875.$$

De asemene valoarea iniţială $m=m''=5,148$ a seriei a duoa este un *minimum*, pentru care formula (γ) ni dă

$$x=\frac{5.5,148+6}{8}=2,6805.$$

Interese compuse.

230. ***Definiţiune.*** Numim in mod general *interes* sau *dobăndă* profitul bănesc ce primesce o persoană *M* de la o alta *N* pentru usul ce face această din urmă cu un capital *C* luat cu imprumut de la cea de'ntĕi pe un timp *t* determinat. Imprumutul insuş se numesce atunci *imprumut cu interes* sau cu *dobăndă*.

Imprumutul se ḑice cu *interes simplu*, cănd intre imprumtătoriu şi imprumutat este admisă condiţiunea de a se plăti *interesul* la finea unui interval de timp determinat, un an sau şeşe luni. Cănd din contra la finea intervalului admis pentru producerea intereselor, *interesul* cuverit se adauge cătră capital remănĕnd in usul debitorului şi producĕnd la răndul seu interes, in profitul imprumutătorului, impreună cu capitalul primitiv, atunci *imprumutul* se ḑice cu *interĕse compuse* sau *cumulate*.

In special interesul anual produs de capitalul de 100 unități monetare poartă nume de *procent*. Aceasta-i cuantitatea esențială care intră in definirea or-cărui imprumut, cu interes *simplu* sau *compus*. Raportul acestei cuantități la 100 este ceea ce se poate numì *procentul redus la unitate*, și care nu'i alta de căt insuși interesul anual al unităței monetare. Insemnănd procentul prin *p* și procentul redus la unitate prin p′, vom avè relațiunea

$$p'=\frac{p}{100}.$$

231. In imprumutul cu *interese compuse* cuestiunea principală de resolvit este următoarea:

Care-i valoarea după n ani a unui capital C imprumutat cu interese compuse și cu p procent?

Interesul anual al unităței monetare fiind p′, acel al unui capital C va fi Cp′; prin urmare valoarea unui capital or care C după un an considerat impreună cu interesul respectiv produs in acest interval, va fi:

$$C+Cp'=C(1+p'),$$

sau insemnănd prin C_1 această valoare, vom avè

$$C_1=C(1+p'). \qquad (1)$$

Această formulă ni arată că *espresiunea valoarei unui capital or-care după trecere de un an, se capătă immulțind capitalul inițial prin binomul* ($1+p'$), *adicĕ unitatea adăugită cătră interesul seu anual*, și care se poate numi, pentru abreviare, *valoarea crescută a unităței*.

Pentru a determina valoarea capitalului C după *n* ani, observăm că la inceputul anului al duoilea capitalul nuou care se poate considerà ca imprumutat pe un an este C_1. Valoarea acestuia la finea anului, sau ceea ce-i tot una, valoarea lui C după duoi ani, va fi in virtutea formulei (1)

$$C_1(1+p').$$

Insemnănd această valoare prin C_2 vom avè

$$C_2=C_1(1+p'),$$

sau ăncă substituind lui C_1 valoarea sa din formula (1) ni va veni

$$C_2=C(1+p')^2, \qquad (2)$$

care ni arată *că valoarea după duoi ani a unui capital C imprumutat cu interèse compuse* și *cu p procent, este ecuale cu capitalul primitiv immulțit prin potența a duoa a binomului $(1+p')$ adicĕ a valoarei crescute a unităței.*

Insemnănd prin C_3, valoarea după trei ani a capitalului C, sau după un an a capitalului C_2 vom avè:

$$C_3=C_2(1+p')=C(1+p')^3, \qquad (2')$$

adică *valoarea după trei ani a unui capital C, imprumutat cu interese compuse și cu $p=100p'$ procent, se formează immulțind capitalul primitiv prin potența a treia a valoarei crescute a unităței.* Acest raționament putĕndu-se repeți indefinit, vedem că insemnănd prin C_n valoarea după *n* ani a capitalului C, vom avè formula

$$C_n=C(1+p')^n, \qquad (\alpha).$$

generală care ni arată *că valoarea după n ani a unui capital or-care imprumutat cu interese compuse* și *cu $p=100p'$ procent, se formează immulțind capitalul primitiv prin potența n^a a valoarei crescute a unităței.*

232. ***Nota I.*** In formula precedentă *n* represintă prin ipotesă un numer intreg de ani. Se poate ănsă areta că ea se aplică și la casul cănd *n* represintă un numĕr fracționariu *de m* ani plus *t dile*, adicĕ

$$n=360.m+t \text{ dile}$$

considerând anul ca fiind compus din 360 dile. Pentru aceasta este de ajuns a imagina că interesele se compun din di in di cu condițiune ca valoarea unităței monetare crescută prin acumularea intereselor in curs de 360 dile să nu inceteză de a fi ecuale cu binomul

$(1+p')$. Designând prin x interesul unităței intr'o ḑi, $1+x$ va fi *valoarĕa crescută a unităței* relativ la o ḑi. După o ḑi această din urmă valoare, sau după 2 ḑile valoarea simplă a unităței monetare, va fi

$$1+x+(1+x)x=(1+x)(1+x)=(1+x)^2.$$

După 360 ḑile sau un an, valoarea uuităței va deveni

$$(1+x)^{360}=1+p', \qquad (3)$$

de unde $$1+x=(1+p')^{\frac{1}{360}}.$$

Valoarea unităței după $m.360+t$ ḑile va fi dar

$$(1+x)^{m.360+t}=(1+p')^{\frac{m360+t}{360}},$$

sau $$(1+x)^{m.360+t}=(1+p')^{m+\frac{t}{360}}.$$

Pentru valoarea unui capital C după $n=m.360+t$ ḑile, vom avè prin urmare

$$C(1+x)^{m360+t}=C(1+p')^{m+\frac{t}{360}},$$

sau $$C_n=C(1+p')^{m+\frac{t}{360}}(*) \qquad (\beta)$$

ceea ce era de aretat.

233. ***Nota II.*** Când n este un numĕr fracționariu de m ani plus t ḑile, valoarea crescută a capitalului C imprumutat cu interese compuse, se mai calculează in modul următoriu. Se determină mai ăntĕiu după formula (α) valoarea capitalului C pentru numĕrul intreg de m ani, ceea ce ni dă

$$C_m=C(1+p')^m. \qquad (\gamma)$$

Valoarea completa C_n a capitulului C după numĕrul fracționariu de n ani se consideră ca fiind compusă din C_m plus interesul simplu al acestei sume relativ la intervalul de t ḑile. Insemnându-l prin X, vom ave relațiunea

$$C_n=C_m+X \qquad (\delta)$$

(*) Când t in loc de ḑile va representa luni atunci vom scrie

$$C_n=C(1+p')^{m+\frac{t}{12}}$$

Pentru determinarea lui X, aplicănd metoada reducţiunei la unitate espusă in aritmetică, găsim uşor

$$X = \frac{C_m p't}{360};$$

de unde formula (δ) devine

$$C_n = C_m + C_m \frac{p't}{360} = C_m \left(1 + \frac{p't}{360}\right)$$

sau $$C_n = C(1+p')^m \left[1 + \frac{p't}{360}\right]. \qquad (\epsilon)$$

234. Afară de problema principală a imprumutului cu interese compuse care ne-am propus'o la inceput, formula (α) poate servi ăncă la resolvirea altor trei probleme cu ajutorul logaritmilor.

Problema I. *Care-i capitalul, care imprumutat fiind cu interese compuse si cu procent ($p=100p'$), ajunge după n ani a avè o valoare dată C_n?*

Insemnănd prin C capitalul căutat, tormula

$$C_n = C(1+p')^n$$

ni va dà $$C = \frac{C_n}{(1+p')^n},$$

sau $$\lg C = \lg C_n - n \lg(1+p'). \quad (1)$$

Esémplu. A calcula valoarea actuală a unui capital care pus fiind cu interese compuse pe timp de 12 ani şi cu ($9=100p'$) procent devine ecuale cu 12,300 lei.

Avem $\begin{cases} C_n = 12300 \\ p' = \frac{9}{100} = 0,09 \end{cases}$

de unde $\begin{cases} 1+p' = 1,09 \text{ și } \lg(1+p') = 0,03743 \\ n = 12, \quad n\lg(1+p') = 0,44916 \\ \lg C_n = 4,08991 \end{cases}$

$$-n\lg(1+p') = \overline{1},55084$$
$$\lg C = 3,64075$$
$$\lg 4372 = \ldots 68 \,\|\, 4372$$
$$\delta = \ldots\ldots 7 \ldots\ldots 0,7$$
$$C = 4372,7$$

Problema. *Pentru câți ani va trebui a imprumută un capital C cu interese compuse și cu ($p = 100p'$) procent, pentru ca să ajungă la o valoare dată A?*

Formula (α) ni dă, substituind lui C_n cuantitatea A

$$A = C(1+p')^n$$

sau

$$\frac{A}{C} = (1+p')^n$$

Luănd logaritmii ambilor membri, ni va veni

$$n\lg(1+p') = \lg A - \lg C$$

sau

$$n = \frac{\lg A - \lg C}{\lg(1+p')}. \qquad (2)$$

Aplicațiuni numerice. Esemplul I. A afla pentru căți ani va trebuì a imprumutà suma de 25000 lei cu interese compuse și cu $5 = 100p'$ procent, pentru ca să ajungă la o valoare indoită.

Avem in acest cas

$$C = 25000$$
$$A = 50000$$
$$p' = 0,05$$
$$1+p' = 1,05,$$

Aplicănd logaritmii ni va venì

$$\lg 50000 = 4{,}69897$$
$$\lg 25000 = 4{,}39794$$
$$\lg A - \lg C = 0{,}30103$$
$$\lg(1+p') = 0{,}02119,$$

de unde $$n = \frac{0{,}30103}{0{,}02119} = \overset{\text{ani}}{14{,}206}$$

sau $$n = \overset{\text{ani.}}{14}\ \overset{\text{luni.}}{2}\ \overset{\text{ḑile}}{14.}$$

Problema II. A aflà după cât timp se va indoi valoarea unui capital or-care C imprumutat cu interese compuse și cu 10=100p' procent.

Făcĕnd in formula (2) A=2C și p'=0,1 vom avè:

$$n = \frac{\lg 2}{\lg(1{,}1)} = \frac{0{,}30103}{0{,}04139} = \overset{\text{ani}}{7{,}273},$$

sau $$n = \overset{\text{ani}}{7},\ \overset{\text{luni}}{3},\ \overset{\text{ḑile}}{8},$$

Problema III. *Cu ce procent va trebui a imprumutà un capital C cu interese compuse, pentru ca după n ani să ajungă la o valoare cerută A?*

Resolvind formula generală (α) in privirea binomului $1+p'$ vom avè, inlocuind C_n prin A

$$1+p' = \sqrt[n]{\frac{A}{C}}. \qquad (3)$$

Aplicațiune. A aflà cu ce procent trebuie a imprumutà o sumă C pentru ca după 14 ani și 3 luni să devină de două ori mai mare.

Aplicănd formula precedentă vom avè:

$$1+p' = \sqrt[14+\frac{3}{12}]{2} = \sqrt[\frac{57}{4}]{2}.$$

sau $$\lg(1+p') = \frac{4}{57}[0{,}30103] = 0{,}02112;$$

de unde $1+p'=1,0498.$

Prin urmare $p'=0,0498,$

sau $p=100p'=4,98.$

235. ***Nota.*** *In aplicaţiunile numerice este bine a sci, că valoarea capitalului C_n, se mai poate calculà destul de uşor, fără ajutorul logaritmilor.*

Esemplu. *A determina valoarea la care ajunge după 5 ani suma de 13897 lei imprumutată cu interese compuse şi cu 6 procent.*

Procedem in modul următoriu:

Capitalul imprumutat	*13897*
Interesul anual de 6%	*833, 82*
Valoarea capitalului după un an	*14730, 82*
Interesul anual de 6%	883, 85
Valoarea capitalului după 2 ani	15614, 67
Interesul anual de 6%	936 88
Valoarea capitalului după 3 ani	16551, 55
Interesul anual de 6%	993, 09
Valoarea capitalului după 4 ani	17544, 64
Interesul anual	1052, 68
Valoarea capitalului după 5 ani	18597, 32

Despre anuităţi

236. ***Definiţiune.*** O *anuitate* este o sumă ficsă pre care o persoană M o plătesce in fie-care an cătră o persoană N sau cătră o societate de credit, pentru a'şi acuita o datorie sau pentru a'şi putè forma prin economii anuale consecutive un capital oare-care intr'un numĕr determinat de ani.

Diferitele cuestiuni relative la *anuităţi* se pot resuma in căte-va probleme generale.

237. ***Problema I.*** *O sumă A este imprumutată cu interese compuse cu p=100p' procent şi cu condiţiune de a fi acuitată prin n plăţi anuale. Se intreabă care trebuie să fie valoarea anuităţei ce se va plăti la sfârşitul fie-cărui an?*

Pentru resolvirea acestei probleme observăm pe de o parte că valoarea sumei A imprumutată cu interese compuse și cu p=100p′ procent, va fi după *n* ani, in virtutea formulei (α)

$$A(1+p')^n;$$

de altă parte insemnând prin a valoarea constantă a anuității ce voim a determina și ținĕnd samă de crescerea fie-căreia anuități prin interesele compuse ce poate produce in intervalul de timp care precede dioa scadenței imprumutului, vom avè:

$a(1+p')^{n-1}$ pentru anuitatea anteia (*)
$a(1+p')^{n-2}$ „ „ a doua
$a(1+p')^{n-3}$ „ „ a treia
,
,
,
$a(1+p')$ „ „ a (n—1)[a]
a „ „ a n[a].

Ansă, prin ipotesă, intreaga datorie $A(1+p')^n$ se stinge prin aceste n plăți anuale, prin urmare va trebui să avem relațiunea

$$A(1+p')^n = a + a(1+p') + .. + a(1+p')^{n-2} + a(1+p')^{n-1}$$

Observănd că al duoilea membru este suma terminilor unei progresiuni geometrice crescĕtoare in care intĕiul este a și rațiunea $(1+p')$, ni va veni

$$A(1+p')^n = \frac{a(1+p')^n - a}{p'}$$

sau
$$A(1+p')^n = a\frac{(1+p')^n - 1}{p'} \qquad (1)$$

Resolvind, in privința anuității a, vom ave

$$a = \frac{Ap'(1+p')^n}{(1+p')^n - 1}. \qquad (2)$$

(*) In adevĕr antĕia anuitate a, adică anuitatea ce se plătesce la finea ântĕiului an, fiind plătită cu n-1 ani inainte de terminul imprumutului, ajunge in dioa scadenței la valoarea a $(1+p')^{n-1}$. Anuitățile a 2a, a 3a, & reportate către dioa scadenței ecuivalează asemenea respectiv cu sumele a $(1+p')^{n-2}$, a $(1+p')^{n-3}$. & &

Nota. Această formulă fiind o relaţiune intre patru cuantităţi A,a,p',n poate servi la determinarea uneia or-care dintre ele când celelalte trei sunt cunoscute.

Aplicaţiuni. Esemplul I. *Care-i anuitatea care in 7 ani va amortisa suma de 4500 galbeni imprumutată cu interese compuse şi cu (8=100p') procent?*

Aplicănd logaritmii la formula precedentă, vom avè

$$\lg a = \lg Ap' + n\lg(1+p') - \lg((1+p')^n - 1);$$

in care
$$A = 4500 \,;\ p' = \frac{8}{100} = 0{,}08 \,;\ n = 7.$$

De unde
$$\lg A = 3{,}6542125$$
$$\lg p' = \bar{2}{,}9030900$$
$$n\lg(1+p') = 0{,}2339666 \quad \| \quad (1+p')^n - 1 = 0{,}713825$$
$$-\lg((1+p')^n - 1) = \bar{0}{,}1464082$$
$$\lg a = 2{,}9366773,$$
$$a = 864{,}33.$$

Esemplul II. *Escedentul reniturilor anuale ale unui proprietariu asupra cheltuelelor este de 550 galb. Pentru acuisiţiunea unui nuou fond acest proprietariu işi propune a contracta un imprumut de 3800 galbeni cu interese compuse şi cu (9=100p') procent. Se intreabă in căţi ani va amortisa această datorie intrebuinţind ca anuitate escedentul reniturilor sale?*

Pentru resolvirea acestei cuestiuni observăm că formula (1) se poate pune supt forma următoare

$$(1+p')^n(a - Ap') = a$$

sau
$$(1+p')^n = \frac{a}{a - Ap'}; \quad (3)$$

de unde
$$n\lg(1+p') = \lg a - \lg(a - Ap')$$

sau
$$n = \frac{\lg a - \lg(a - Ap')}{\lg(1+p')}$$

in care $a=550$; $A=3800$; $p'=\frac{9}{100}=0,09$.

Vom ave dar

$$\lg a=2,7403627$$
$$\lg(a-Ap')=2,3180633$$
$$\lg a-\lg(a-Ap')=0,4222994$$
$$\lg(1+p')=0,0374265$$
$$n=\frac{0,4222964}{0,0374285}=11,28.$$

Nota. Valoarea fracționară a lui n ni arată că in acest cas acuitarea datoriei nu se poate efectua, in mod complet prin anuități. Pentru a determina restul de plată din datoria de amortisat după a unspreḍecea anuitate, va fi de ajuns din valoare la care ajunge suma imprumutată după 11 ani, a scăde totalul celor 11 anuități luate cu interesele lor compuse. Vom ave astfeliu calculănd prin logaritmi după formulele cunoscute;

$$3800(1,09)^{11}=9805,62.$$
$$550.\frac{(1,09)^{11}-1}{0.09}=9658,18.$$

Restul după a 11ª anuitate=147,44 galb.

239. **Problema II.** *O sumă a este dată cu interese compuse și cu $p=100p'$ procent la inceputul fiecăruià an; se intreabă căre-i capitalul care va resultà, după n ani, din aceste anuități sau imprumuturi anuale succesive?*

Valoarea anuităței anteia după n ani va fi
$$a(1+p')^n;$$

a anuităței a duoa după (n—1) ani $a(1+p')^{n-1}$
a anuităței a treia după (n—2) ani $a(1+p')^{n-2}$
a anuităței a (n—1)ª . . . $a(1-p')^2$
a anuităței a nª . . . . . . $a(1+p')$.

Insemnănd prin A capitalul căutat, vom ave

$$A = a(1+p') + a(1+p')^2 + . + a(1+p')^{n-1} + a(1+p')^n,$$

sau $A = a(1+p')[1 + (1+p') + (1+p')^2 + .. + (1+p')^{n-1}]$

sau ăncă: $$A = a(1+p')\frac{(1+p')^n - 1}{p'}. \qquad (3)$$

240. ***Aplicaţiune.*** *Care-i capitalul de care va dispune după 4 ani o persoană care in cursul acestui interval, dă la inceputul fie-cărui an cu interese acumulate cu (6=100p') procent, suma de 12950 lei ?*

Aplicănd logaritmii la formula (3), ni va veni :

$$\lg A = \lg a + \lg(1+p') + \lg([1+p']^n - 1] - \lg p'$$

in care avem $a = 12950$, $p' = \frac{6}{100} = 0{,}06$, $n = 4$.

De unde $\lg a = 4{,}1122698$

$\lg(1+p') = 0{,}0253059$ $\{ n\lg(1+p') = 0{,}1012236$

$\lg((1+p')^n - 1) = \overline{1},4190912$ $\{ (1+p')^n - 1 = 0{,}262477$

$-\lg p' = 1{,}2218487$

$\lg A = 4{,}7785156,$

$A = 60050^l\ 37.$

Nota. Determinarea sumei A se mai poate face in modul următoriu fără ajutorul logaritmilor.

12950	*Valorea inițială a anuității*
777,00	*Interesul de 6%.*
13727,00	*Valoarea anuităței după un an.*
823,62	*Interesul de 6%.*
14550,62	*Valoarea anuităţei după 2 ani*
873,04	*Interesul de 6%.*
15423,66	*Valoarea anuităţei după 3 ani.*
925,42	*Interesul de 6%.*
16349,08	*Valoarea anuităţii după 4 ani, sau valoarea finală a primei anuităţi.*

Totalul A a câte-patru anuităţilor crescute prin acumularea intereselor, pentru antĕia in intervalulul a 4 ani; pentru a 2-a in intervalul a 3 ani; pentru a 3-a in intervalul a 2 ani şi pentru a 4-a in intervalul unui an, se capătă uşor cu ajutorul tabelului precedent care conţine toate aceste valori.

Avem	16349,08	pentru	1ª	anuitate
	15423,66	. .	2ª	. . .
	14550,62	. .	3ª	. . .
	13727,00	. .	4ª	. . .

de unde $A = 60050,37$

232 **Problema III.** *Doue sume a, b sunt de plată una după* **m** *alta dupa* **n** *ani; se intreabă carei suma unică ce va trebui a plăti peste s ani pentru a achita ambele datorii, p=100p' fiind procentul și interesele fiind compuse?*

Pentru deslegarea acestei probleme observăm că insemnănd prin a' valoarea actuală a sumei a de plată după m ani și prin b' acea a sumei b de plată după n ani, vom pute scri, in virtutea formulei intereselor compuse,

$$a = a'(1+p')^m$$
$$b = b'(1+p')^n$$

sau

$$a' = \frac{a}{(1+p')^m}, \quad b' = \frac{b}{(1+p')^n}.$$

După s ani vom ave

$$a'(1+p')^s = \frac{a(1+p')^s}{(1+p')^m} = a(1+p')^{s-m}$$

$$b'(1+p')^s = \frac{b(1+p')^s}{(1+p')^m} = b(1+p')^{s-n}$$

de unde suma necunoscută x se va determina prin formula

$$x = a(1+p')^{s-m} + b(1+p')^{s-n}.$$

FINE.